

Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik

Z A M P

Journal of Applied Mathematics and Physics

Journal de Mathématiques et de Physique appliquées

Editores: J. Ackeret E. Baldinger E. Baumann R. Mercier P. Scherrer E. Stiefel
F. Stüssi W. Traupel H. Ziegler
Redactor: R. Sängler

INHALT - CONTENTS - SOMMAIRE

SCHWARZ, H.-R.: Ein Verfahren zur Stabilitätsfrage bei Matrizen-Eigenwertproblemen	473
SUPPGER, E. W., and TALEB, N. J.: Free Lateral Vibration of Beams of Variable Cross Section . .	501

Kurze Mitteilungen - Brief Reports - Communications brèves

BEUSCH, W., und MAEDER, D.: Ein kompaktes Dekadenzählgerät mit bedarfsweiser Umschaltung der Zählkanäle, Untersetzstufen und Zählwerke	520
FINSTON, M.: Free Convection Past a Vertical Plate.	527
GERHARZ, R.: Ein Elektronenvervielfacher als Pulslichterzeuger	529
PAHOR, S., und STRNAD, J.: Die Nusseltsche Zahl für laminare Strömung im zylindrischen Rohr mit konstanter Wandtemperatur	536
SÄNGER, R.: Empfindlichkeit eisbildender Impfstoffe auf ihre Wasserlöslichkeit	538

Varia - Miscellaneous - Divers

Frühjahrstagung der S. P. G. 1957	541
Buchbesprechungen - Book Reviews - Notices bibliographiques	541

ZAMP	Vol. VII	Fasc. 6	Pag. 473-544	25. 11. 56
------	----------	---------	--------------	------------

Birkhäuser Verlag Basel, Schweiz

Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik

Journal of Applied Mathematics and Physics

Journal de Mathématiques et de Physique appliquées

ZAMP

Redactor: Prof. Dr. R. Sängner, Postfach Zürich 23 (Schweiz)

ZAMP erscheint regelmässig alle zwei Monate. *Redaktionsschluss*: spätestens 8 Wochen vor Erscheinungstermin. Manuskripte und alle die Redaktion betreffenden Zuschriften sind an den Redaktor zu richten. Manuskripte für *Kurze Mitteilungen* können, falls die Autoren auf Zustellung eines Korrekturabzuges verzichten, 6 Wochen vor Erscheinungstermin eingereicht werden. Die Beiträge werden in deutscher, englischer, französischer oder italienischer Sprache publiziert, doch soll jeder *Originalarbeit* und *Kurzen Mitteilung* eine kurze Zusammenfassung in einer andern als der Originalsprache beigegeben werden. *Abbildungsvorlagen* sollen reproduktionsfertig mit Reduktionsmaßstab versehen eingeliefert werden, hingegen soll die Beschriftung nur mit Bleistift, am besten auf einem lose vorgeklebten, durchsichtigen Papier, ausgeführt werden. Autoren von Originalarbeiten mit mehr als 16 Seiten Umfang haben von der 17. Seite an einen *Beitrag an die Satzskosten* von sFr. 20.- pro Seite und von der 25. Seite an einen solchen von sFr. 35.- pro Seite zu entrichten. Die Verfasser von *Zusammenfassenden Berichten*, *Originalarbeiten* und *Kurzen Mitteilungen* erhalten 50 Gratisseparata ohne Umschlag.

ZAMP is published regularly every two months. All papers must be in the hands of the editor at least 8 weeks before publication of the issue. Manuscripts and all other correspondence concerning contributions to the periodical should be addressed to the Editor. Manuscripts of *Brief Reports* can be submitted 6 weeks before publication of the issue, if the authors dispense with proof-reading. The contributions will be published in English, German, French, or Italian; to each *Original Paper* and *Brief Report* should be added a brief summary in a language other than the original one. Drawings and photographs for *illustrations* should be sent ready for reproduction with indication of the proposed reduction; lettering on the illustrations should be entered in pencil, preferably on a loosely attached transparent sheet. Authors of *Original Papers* exceeding 16 pages are requested to pay a *contribution of fr. 20.-* per page for pages 17-24, and of fr. 35.- per page for pages 25 and over. The authors of *Survey Articles*, *Original Papers*, and *Brief Reports* receive 50 free separata prints without cover.

ZAMP paraît régulièrement tous les deux mois. Derniers délais pour présenter les manuscrits: deux mois avant la parution de chaque numéro. Tous les manuscrits et toute correspondance relatifs à la rédaction sont à adresser au rédacteur. Les manuscrits pour des *communications brèves* peuvent être présentés six semaines avant la parution, si les auteurs renoncent à contrôler les épreuves. Les articles seront publiés en langues française, anglaise, allemande ou italienne; cependant, chaque *article original* et toute *communication brève* devront être accompagnés d'un résumé en une autre langue. Les *illustrations* doivent être prêtes à la reproduction et il faudra y indiquer l'échelle de réduction. La légende devra être inscrite au crayon, de préférence sur papier transparent, légèrement collé à l'illustration. Pour articles originaux qui dépassent 16 pages, une *contribution de fr.s. 20.-* par page doit être payée pour les pages 17-24; à partir de page 25 la contribution est de fr.s. 35.- par page. Les auteurs de *comptes rendus*, ainsi que ceux d'*articles originaux* et de *communications brèves* recevront 50 tirés à part sans couverture de leur article.

Jahresabonnement (6 Nummern): Inland sFr. 46.-, Ausland sFr. 58.-, Einzelnummer sFr. 12.-

Annual subscription (6 issues): Switzerland fr. 46.-, foreign fr. 58.-, single copy fr. 12.-

Abonnement annuel (6 numéros): Suisse fr.s. 46.-, étranger fr.s. 58.-, le numéro fr.s. 12.-

Postabonnement — Post-Office Subscription — Abonnement par office postal

Belgien, Luxemburg
Italien

Dänemark
Marokko

Deutschland
Norwegen

Finnland
Portugal

Holland
Schweden

Inserate/Advertisements/Annonces: $\frac{1}{4}$ Seite/page: Fr. 165.-, $\frac{1}{2}$ Seite/page: Fr. 88.-, $\frac{1}{8}$ Seite/page: Fr. 50.-

Alle Rechte, einschliesslich der Übersetzung und Reproduktion auf photostatischem Wege oder durch Mikrofilm, vorbehalten. — All rights, incl. translations and photostatic and microfilm reproduction, reserved. — Tous droits, y compris traductions et reproductions photostatiques et par microfilm, réservés.

Copyright 1956 by Birkhäuser Verlag, Basel 10, Switzerland

Printed in Switzerland

Ein Verfahren zur Stabilitätsfrage bei Matrizen-Eigenwertproblemen

VON HANS-RUDOLF SCHWARZ, Zürich¹⁾

1. Einleitung und Problemstellung

Zahlreiche technische Fragen führen auf das mathematische Problem, für das Matrizen-Eigenwertproblem $(A - \lambda E)x = 0$ die Anzahl der Eigenwerte mit positivem Realteil zu bestimmen, wobei die Eigenwerte selbst meistens gar nicht interessieren. Diese Problemstellung nennt man kurz die Stabilitätsfrage. Um diese zu beantworten, sind verschiedene klassische Kriterien bekannt, welche aber alle vom charakteristischen Polynom $P(\lambda)$ ausgehen, also bedingen, dass dasselbe explizit ermittelt wird. So erwähne ich die Kriterien von ROUTH [1]²⁾ und HURWITZ [2], welche in ihrer ursprünglichen Formulierung auf Polynome mit reellen Koeffizienten Anwendung finden, im übrigen aber gleichbedeutend sind. Das Ortskurvenkriterium von NYQUIST [3] bestimmt auf graphischem Weg die Anzahl der Nullstellen der charakteristischen Gleichung $P(\lambda) = 0$ mit negativem Realteil. Eine unmittelbare Folge davon ist das Lagen- oder Lückenkriterium [4], welches aussagt, dass dann und nur dann sämtliche Nullstellen von $P(\lambda) = 0$ negative Realteile aufweisen, wenn die Wurzeln von Real- und Imaginärteil von $P(iy) = \operatorname{Re}(y) + i \operatorname{Im}(y)$ reell sind und sich gleichzeitig gegenseitig trennen. Das bekannteste numerische Verfahren zur Beantwortung der Stabilitätsfrage dürfte wohl die Methode der Sturmschen Kette [5] sein, wonach aus dem Real- und Imaginärteil von $P(iy) = \operatorname{Re}(y) + i \operatorname{Im}(y)$ durch fortgesetzte Division mit Rest eine Folge von Polynomen absteigenden Grades gebildet wird. Die Anzahl der Eigenwerte in der linken komplexen Halbebene $\operatorname{Re} z < 0$ lässt sich dann aus dem Unterschied der Zeichenwechsel in der Polynomfolge für $y = -\infty$ und $y = +\infty$ angeben. Damit äquivalent ist das Stabilitätskriterium von WALL [6], welches die Aussage in die Form eines Kettenbruches kleidet. Daneben finden sich in der Literatur einerseits noch verschiedene numerische Verfahren, welche vermittels eines Reduktionsprozesses aus dem charakteristischen Polynom eine Folge von Polynomen bestimmen, aus denen die Frage beantwortet werden kann, und andererseits auch einige graphische Methoden.

¹⁾ Institut für angewandte Mathematik der ETH.

²⁾ Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 500.

Auf der andern Seite führt jedes gangbare numerische Verfahren zur expliziten Entwicklung des charakteristischen Polynoms von $(A - \lambda E) x = 0$ auf eine Folge von Polynomen, deren Grad sich bei jedem Schritt um 1 erhöht und die mit dem charakteristischen Polynom endigt. Ich verweise auf das Verfahren von WEBER-VOETTER [7], auf die Methode von HESSENBERG [8] und den Biorthogonalisierungsprozess von LANCZOS [9], welche alle über eine Reihe von Polynomen aufsteigenden Grades zum charakteristischen Polynom führen.

Um dann die allein interessierende Stabilitätsfrage beantworten zu können, muss eine Polynomfolge absteigenden Grades ermittelt werden. Um den Weg über eine aufsteigende und dann über eine absteigende Kette von Polynomen zu vermeiden, in welcher das charakteristische Polynom als solches von höchstem Grad meist gar nicht interessiert, gab mir Herr Professor Dr. E. STIEFEL (ETH) die Anregung, folgende Frage zu untersuchen:

Problem: Man berechne das charakteristische Polynom $P(\lambda)$ aus der Matrix A über eine solche aufsteigende Kette von Polynomen, aus welcher schon selbst die Stabilitätsfrage beantwortet werden kann.

Dieser Wunsch führte zu einem Verfahren, unter Umgehung des charakteristischen Polynoms die gegebene Matrix A mit Hilfe von elementaren Transformationen auf eine Normalform zu bringen, deren Elemente allein schon das Stabilitätsproblem lösen. Die beschriebene Methode weist den Vorteil auf, dass die anzuwendenden Rechenoperationen von grosser Einheitlichkeit sind, was das Programmieren auf Rechenautomaten erleichtert. Bei der klassischen Methode der Sturmschen Kette stützt sich die ganze Entscheidung der Stabilität auf eine längere Rechnung, welche vom charakteristischen Polynom ausgeht. Die Koeffizienten dieses Polynoms enthalten sicher weniger Information als die ursprünglich gegebenen Matricelemente. Es ist zu hoffen, dass unsere Methode, die die Matricelemente in mehr direkter Weise verwendet, in manchen Fällen numerisch stabiler verläuft. Ob diese Hoffnung berechtigt ist, können allerdings erst umfangreichere Versuche entscheiden.

An dieser Stelle möchte ich den Herren Professoren Dr. E. STIEFEL und Dr. H. RUTISHAUSER, die mit ihren wertvollen Hinweisen zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben, meinen besten Dank aussprechen.

I. Das Stabilitätskriterium

2. Das Kettenbruchkriterium von WALL [6]

Es sei $P(z) = z^n + c_{n-1}z^{n-1} + c_{n-2}z^{n-2} + \dots + c_1z + c_0$ ein Polynom n -ten Grades mit komplexen Koeffizienten $c_k = p_k + i q_k$. Aus diesem bilde man $Q(z) = [P(z) - (-1)^n \bar{P}(-z)]/2$, worin $\bar{P}(z)$ das Polynom mit den konjugierten

komplexen Koeffizienten $\bar{c}_k = p_k - i q_k$ bedeutet. Dann ist

$$Q(z) = p_{n-1} z^{n-1} + i q_{n-2} z^{n-2} + p_{n-3} z^{n-3} + i q_{n-4} z^{n-4} + \dots,$$

und der Quotient $Q(z)/P(z)$ hat im allgemeinen eine Kettenbruchentwicklung von folgender Form mit in z linearen Teilennern:

$$\frac{Q(z)}{P(z)} = \frac{1}{r_1 z + s_1 + 1} + \frac{1}{r_2 z + s_2} + \frac{1}{r_3 z + s_3} + \dots + \frac{1}{r_n z + s_n}. \quad (2.1)$$

Satz 1 (Kriterium von WALL): Existiert die Kettenbruchentwicklung (2.1) von $Q(z)/P(z)$, so sind darin die Grössen r_k ($k = 1, 2, \dots, n$) reell und von Null verschieden, die s_k ($k = 1, 2, \dots, n$) rein imaginär oder null. Sind dann unter den r_k m positiv und $(n - m)$ negativ, so haben m der Wurzeln von $P(z) = 0$ negative und $(n - m)$ positive Realteile.

Die Teilnenner in (2.1) ergeben sich durch fortgesetzte Division mit Rest nach dem euklidischen Algorithmus für $P(z)$ und $Q(z)$. So ist speziell für den ersten Teilnenner

$$P(z) = (r_1 z + s_1 + 1) Q(z) + R_1(z) \quad (2.2)$$

und nach Subtraktion von $Q(z)$ auf beiden Seiten

$$P(z) - Q(z) = (r_1 z + s_1) Q(z) + R_1(z). \quad (2.3)$$

Da der Rest $R_1(z)$ in (2.2) und (2.3) gleich ist, lautet die Kettenbruchentwicklung von $Q(z)/[P(z) - Q(z)]$

$$\frac{Q(z)}{P(z) - Q(z)} = \frac{1}{r_1 z + s_1} + \frac{1}{r_2 z + s_2} + \frac{1}{r_3 z + s_3} + \dots + \frac{1}{r_n z + s_n} \quad (2.4)$$

mit denselben r_k, s_k ($k = 1, 2, \dots, n$) wie in (2.1). Demnach gilt der zu Satz 1 äquivalente

Satz 2: Existiert die Kettenbruchentwicklung (2.4) für den Quotienten $Q(z)/[P(z) - Q(z)]$, so sind darin die Grössen r_k ($k = 1, 2, \dots, n$) reell und von Null verschieden, die s_k ($k = 1, 2, \dots, n$) rein imaginär oder null. Die Anzahl der positiven r_k ist dann gleich der Anzahl der Wurzeln von $P(z) = 0$ mit negativem Realteil.

Die Teilnenner $(r_k z + s_k)$ in (2.4) berechnen sich nach dem euklidischen Algorithmus für $f_0(z) = P(z) - Q(z)$ und $f_1(z) = Q(z)$. Es ist

$$\left. \begin{aligned} f_0(z) &= P(z) - Q(z) \\ &= z^n + i q_{n-1} z^{n-1} + p_{n-2} z^{n-2} + i q_{n-3} z^{n-3} + p_{n-4} z^{n-4} + \dots, \\ f_1(z) &= Q(z) = p_{n-1} z^{n-1} + i q_{n-2} z^{n-2} + p_{n-3} z^{n-3} + i q_{n-4} z^{n-4} + \dots, \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

mit reellen Koeffizienten $A_{k, k+j}$ mit $A_{k, k} \neq 0$ wie folgt bilden:

[illegible]

Für das folgende treffen wir die

Voraussetzung: Die Sturmsche Kette für das Polynom $P(z)$ existiert in der Form (3.1), wobei die Quotienten $(R_k y + S_k)$ bei der fortgesetzten Division mit Rest linear seien.

Dann gilt bekanntlich

Satz 3: Existiert die Kette (3.1), so ist die Anzahl N der Nullstellen von $P(z) = 0$ mit negativem Realteil $N = (n + l - m)/2$, wobei $(l - m)$ der Unterschied in der Zahl der Zeichenwechsel in der Sturmschen Kette $F_0(y), F_1(y), \dots, F_{n-1}(y), F_n(y)$ für $y = -\infty$ und $y = +\infty$ ist.

Darin ist l die Gesamtzahl der Verluste und m die Gesamtzahl der Gewinne an Zeichenwechseln in der Kette (3.1) beim Durchlaufen der imaginären Achse von $-i\infty$ nach $+i\infty$. Diese Werte lassen sich aus den Koeffizienten $A_{k, \textcolor{teal}{k}}$ bzw. aus den Quotienten $R_k = A_{k-1, k-1}/A_{k, \textcolor{teal}{k}}$ ohne weiteres angeben. Betrachtet man $F_{k-1}(y)$ und $F_k(y)$, so hat man bezüglich dieser beiden Glieder in der Kette hinsichtlich Zeichenwechsel folgende Situation:

$$\operatorname{sgn} R_k = \begin{cases} +1 & \left\{ \begin{array}{l} \text{für } y = -\infty \quad 1 \text{ Zeichenwechsel} \\ \text{für } y = +\infty \quad 0 \text{ Zeichenwechsel} \end{array} \right\} \quad 1 \text{ Verlust,} \\ -1 & \left\{ \begin{array}{l} \text{für } y = -\infty \quad 0 \text{ Zeichenwechsel} \\ \text{für } y = +\infty \quad 1 \text{ Zeichenwechsel} \end{array} \right\} \quad 1 \text{ Gewinn.} \end{cases}$$

Somit ist die Gesamtzahl der Verluste l an Zeichenwechseln gleich der Anzahl der positiven R_k und die Zahl der Gewinne m gleich der Anzahl der negativen

R_k . Wenn $F_0(y)$ und $F_1(y)$ teilerfremd sind, die fortgesetzte Division mit Rest wirklich mit $F_n(y) = \text{const} \neq 0$ endet, so ist $n = l + m$ und demnach

$$N = \frac{(l + m + l - m)}{2} = l,$$

also folgt aus Satz 3:

Satz 4: Die Anzahl N der Nullstellen von $P(z) = 0$ mit negativem Realteil ist gleich der Anzahl der positiven R_k in der Kette (3.1).

Für die Polynome $F_0(y)$ und $F_1(y)$ ergeben sich:

1. Fall: $n = 4k$ oder $n = 4k + 1$ (k ganz)

$$\left. \begin{aligned} F_0(y) &= y^n + q_{n-1}y^{n-1} - p_{n-2}y^{n-2} - q_{n-3}y^{n-3} + p_{n-4}y^{n-4} + \dots, \\ F_1(y) &= p_{n-1}y^{n-1} + q_{n-2}y^{n-2} - p_{n-3}y^{n-3} - q_{n-4}y^{n-4} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

2. Fall: $n = 4k + 2$ oder $n = 4k + 3$ (k ganz)

$$\left. \begin{aligned} F_0^*(y) &= -y^n - q_{n-1}y^{n-1} + p_{n-2}y^{n-2} + q_{n-3}y^{n-3} - p_{n-4}y^{n-4} - \dots = -F_0(y), \\ F_1^*(y) &= -p_{n-1}y^{n-1} - q_{n-2}y^{n-2} + p_{n-3}y^{n-3} + q_{n-4}y^{n-4} - \dots = -F_1(y). \end{aligned} \right\}$$

Da $F_0^*(y) = -F_0(y)$ und $F_1^*(y) = -F_1(y)$ ist, so unterscheiden sich die Ketten $F_k^*(y)$ und $F_k(y)$ nur durch das Vorzeichen; es ist $F_k^*(y) = -F_k(y)$, aber $R_k^* = R_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$). Deshalb kann die Zerlegung von $P(z)$ in $F_0(y)$ und $F_1(y)$ unabhängig von n in der ersten Form (3.2) geschehen. Für die Koeffizienten $R_k, S_k, A_{k, k+j}$ ($k = 1, 2, \dots, n; j = 0, 1, \dots, n - k$) bestehen die folgenden Rekursionsformeln:

$$\left. \begin{aligned} A_{k-1, k-1} : A_{k, k} &= R_k, \quad (A_{k-1, k} - R_k A_{k, k+1}) : A_{k, k} = S_k \\ & \quad (k = 1, 2, \dots, n), \\ -A_{k-1, k+1+j} + S_k A_{k, k+1+j} + R_k A_{k, k+2+j} &= A_{k+1, k+1+j} \\ & \quad (k = 1, 2, \dots, n-1; j = 0, 1, \dots, n-k-1; \text{ mit } A_{k, n+1} = 0). \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

Die Anfangsbedingungen dazu lauten nach (3.2):

$$\left. \begin{aligned} A_{00} &= 1, \quad A_{01} = q_{n-1}, \quad A_{02} = -p_{n-2}, \quad A_{03} = -q_{n-3}, \quad A_{04} = p_{n-4}, \dots, \\ A_{11} &= p_{n-1}, \quad A_{12} = q_{n-2}, \quad A_{13} = -p_{n-3}, \quad A_{14} = -q_{n-4}, \dots \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

Nach diesen Vorbereitungen kann nun gezeigt werden, dass Satz 2 und damit Satz 1 eine Folge von Satz 4 ist.

Voraussetzung: Die Sturmsche Kette in der Form (3.1) für $P(z)$ existiert.

Behauptung: Die Kettenbruchentwicklung (2.4) von $Q(z)/[P(z) - Q(z)]$ existiert, und es gilt

$$\left. \begin{aligned} a_{k,k+j} &= i^j A_{k,k+j} \quad (k = 0, 1, \dots, n; j = 0, 1, \dots, n-k), \\ r_k &= R_k, \quad s_k = i S_k \quad (k = 1, 2, \dots, n). \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

Beweis

Induktionsannahme: Die Behauptung (3.5) sei richtig für $k \leq m \geq 1$.

Induktionsschluss: Gemäss Rekursionsformel (2.7) ist für $k = m$:

$$a_{m+1, m+1+j} = a_{m-1, m+1+j} - s_m a_{m, m+1+j} - r_m a_{m, m+2+j} \quad (0 \leq j \leq n - m - 1).$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist dies einerseits

$$\begin{aligned} &= i^{j+2} A_{m-1, m+1+j} - i S_m i^{j+1} A_{m, m+1+j} - R_m i^{j+2} A_{m, m+2+j}, \\ &= i^j (-A_{m-1, m+1+j} + S_m A_{m, m+1+j} + R_m A_{m, m+2+j}), \end{aligned}$$

und anderseits infolge (3.3)

$$a_{m+1, m+1+j} = i^j A_{m+1, m+1+j} \quad (j = 0, 1, \dots, n - m - 1).$$

Weiter schliesst man analog unter Verwendung des letzten Resultates für $j = 0, 1$:

$$\begin{aligned} r_{m+1} &= a_m : a_{m+1, m+1} = A_m : A_{m+1, m+1} = R_{m+1}, \\ s_{m+1} &= (a_{m, m+1} - r_{m+1} a_{m+1, m+2}) : a_{m+1, m+1}, \\ &= (i A_{m, m+1} - R_{m+1} i A_{m+1, m+2}) : A_{m+1, m+1} = i S_{m+1}. \end{aligned}$$

Induktionsverankerung: Für $k = 0$ und $k = 1$ liest man die Beziehungen $a_{0j} = i^j A_{0j}$, $a_{11+j} = i^j A_{11+j}$ direkt aus den Anfangsbedingungen (2.8) und (3.4) ab, und es folgt daraus, dass für $k = 1$

$$\begin{aligned} r_1 &= a_{00} : a_{11} = A_{00} : A_{11} = R_1, \\ s_1 &= (a_{01} - r_1 a_{12}) : a_{11} = (i A_{01} - R_1 i A_{12}) : A_{11} = i S_1 \end{aligned}$$

ist. Nach Voraussetzung über die Existenz der Sturmschen Kette (3.1) sind die $R_k \neq 0$ ($k = 1, 2, \dots, n$), und deshalb sind auch die $r_k \neq 0$ ($k = 1, 2, \dots, n$), das heisst, die Kettenbruchentwicklungen (2.4) und (2.1) existieren und die r_k sind reell und von Null verschieden. Da die S_k ($k = 1, 2, \dots, n$) reell sind aber eventuell verschwinden können, sind die $s_k = i S_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$) rein imaginär oder auch null. Infolge der Gleichheit $r_k = R_k$ decken sich die Aussagen

über die Anzahl der Wurzeln von $P(z) = 0$ mit negativem Realteil in den Sätzen 1 und 4, so dass damit der Beweis von Satz 1 mit Hilfe des Satzes über die Sturmsche Kette erbracht ist.

4. Folgerung aus dem Kettenbruchkriterium

Voraussetzung: Die Entwicklung von $Q(z)/P(z)$ in einen Kettenbruch (2.1) existiert.

Folgerungen: Nach Satz 1 sind die Grössen r_k ($k = 1, 2, \dots, n$) von Null verschieden. Deshalb lässt sich auf den Kettenbruch (2.1) eine Äquivalenztransformation ausführen, indem der k -te Teilbruch mit $-1/r_k$ erweitert wird:

$$\frac{Q(z)}{P(z)} = \left| \frac{-1/r_1}{-z - \frac{s_1}{r_1} - \frac{1}{r_1}} \right| + \left| \frac{1/r_1 r_2}{-z - \frac{s_2}{r_2}} \right| + \left| \frac{1/r_2 r_3}{-z - \frac{s_3}{r_3}} \right| + \dots + \left| \frac{1/r_{n-1} r_n}{-z - \frac{s_n}{r_n}} \right|. \quad (4.1)$$

Setzt man dann

$$\left. \begin{aligned} \frac{-1}{r_1} &= a_1, & \frac{1}{r_{k-1} r_k} &= a_k \quad (k = 2, 3, \dots, n), \\ -\frac{s_k}{r_k} &= b_k \quad (k = 1, 2, \dots, n), \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

so sind die a_k ($k = 1, 2, \dots, n$) reell und von Null verschieden, die b_k ($k = 1, 2, \dots, n$) rein imaginär oder eventuell null und man erhält für (4.1)

$$\frac{Q(z)}{P(z)} = \frac{a_1}{a_1 + b_1 - z} + \frac{a_2}{b_2 - z} + \frac{a_3}{b_3 - z} + \dots + \frac{a_n}{b_n - z}. \quad (4.3)$$

Gemäss dem Determinantensatz über die Näherungszähler und Nenner eines Kettenbruches ist $P(z)$ als n -ter Nenner von (4.3) gleich folgender Determinante:

$$P(z) = \begin{vmatrix} a_1 + b_1 - z & a_2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & b_2 - z & a_3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & b_3 - z & a_4 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & b_4 - z & a_5 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b_{n-1} - z & a_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & b_n - z \end{vmatrix}. \quad (4.4)$$

Aus (4.4) ist ersichtlich, dass $P(z)$ das charakteristische Polynom des Eigenwertproblems $(N - zE)x = 0$ ist, wobei die Matrix N folgende spezielle Jaco-

bische Form aufweist:

$$N = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 & a_2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & b_2 & a_3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & b_3 & a_4 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & b_4 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b_{n-1} & a_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & b_n \end{pmatrix}. \tag{4.5}$$

In der Matrix N sind die Grössen a_k ($k = 1, 2, \dots, n$) reell und von Null verschieden, die b_k ($k = 1, 2, \dots, n$) rein imaginär oder null.

Übertragung des Kriteriums von Wall auf die Matrix N : Die Stabilitätsfrage kann nach (4.2) allein aus dem Realteil a_1 des ersten Elementes in der Hauptdiagonalen und den reellen Elementen a_k ($k = 2, 3, \dots, n$) in der oberen begleitenden Diagonalen beantwortet werden. Nach (4.2) gelten:

$$r_1 = -\frac{1}{a_1}, \quad r_2 = -\frac{1}{r_1 a_2} = -\frac{a_1}{a_2}, \quad r_3 = \frac{1}{r_2 a_3} = -\frac{a_2}{a_1 a_3},$$

.....

$$r_k = \begin{cases} -\frac{a_1 a_3 a_5 \dots a_{k-1}}{a_2 a_4 a_6 \dots a_k} & (k \text{ gerade}) \\ -\frac{a_2 a_4 a_6 \dots a_{k-1}}{a_1 a_3 a_5 \dots a_k} & (k \text{ ungerade}) \end{cases} \quad (k = 2, 3, \dots, n),$$

und es ist somit

$\operatorname{sgn} r_k = -\operatorname{sgn} (a_1 a_2 a_3 \dots a_k) \quad (k = 1, 2, \dots, n).$

(4.6)

Demnach folgt aus Satz 1:

Satz 5: Die Zahl der positiven Glieder in der Folge von Produkten $a_1, a_1 a_2, a_1 a_2 a_3, \dots, a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n$ ergibt die Anzahl der Eigenwerte von $(N - z E) x = 0$ mit positiven Realteilen.

Schlussfolgerung: Das gestellte Problem, das charakteristische Polynom einer gegebenen Matrix A mit komplexen Elementen mittels einer Kette von solchen Polynomen zu ermitteln, welche die Stabilitätsfrage beantworten kann, ist damit auf die Aufgabe zurückgeführt, die Matrix A mit Hilfe einer Ähnlichkeitstransformation in die Normalform N überzuführen.

Im zweiten Teil wird gezeigt werden, dass diese Transformation im allgemeinen durchführbar ist. Dabei erweist es sich als zweckmässig, die Normalform N an der Nebendiagonalen zu spiegeln und die Bezeichnung leicht zu

ändern. Es seien

$$B = \begin{pmatrix} i b'_{11} & b_{12} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & i b'_{22} & b_{23} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & i b'_{33} & b_{34} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & i b'_{n-1 n-1} & b_{n-1 n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & b_{n n} + i b'_{n n} \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

bzw. im reellen Fall

$$B = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & b_{23} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & b_{34} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b_{n-1 n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & b_{n n} \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

die Normalformen der transformierten, zu A äquivalenten Matrix, worin die $b_{k, k+1}$ ($k = 1, 2, \dots, n-1$) und $b_{n n}$ reell und von Null verschieden sind, währenddem die $b'_{k k}$ ($k = 1, 2, \dots, n$) in (4.7) reell aber nicht von Null verschieden sein müssen. An Stelle von Satz 5 lässt sich dann folgender Satz formulieren:

Satz 6 (Stabilitätskriterium für Matrizen): Wenn es gelingt, eine gegebene Matrix $A = (a_{jk})$ mit komplexen Elementen a_{jk} mittels einer Ähnlichkeitstransformation in die Form (4.7), bzw. (4.8) bei reeller Matrix A , überzuführen, dann ist die Zahl der positiven Glieder in der Folge von Produkten $b_{n n}, b_{n n} b_{n-1 n}, b_{n n} b_{n-1 n} b_{n-2 n-1}, \dots, b_{n n} b_{n-1 n} \dots b_{23} b_{12}$ gleich der Anzahl der Eigenwerte von A mit positiven Realteilen. Sind speziell alle Elemente $b_{12}, b_{23}, \dots, b_{n-1 n}, -b_{n n}$ positiv, so haben alle Eigenwerte negative Realteile.

II. Methode der Transformation

5. Elemente der Transformation

Die Grundidee der Transformation besteht darin, durch geeignete Wahl und Reihenfolge von möglichst einfachen Ähnlichkeitstransformationen in endlich vielen Schritten sukzessive die gewünschte Normalform zu gewinnen, indem in jedem einzelnen Schritt ein Element der Matrix behandelt wird.

Einerseits bewirkt ja Multiplikation mit einer Diagonalmatrix T von links TA in A eine Multiplikation der Zeilen mit den entsprechenden Diagonalele-

menten von T , und Multiplikation von rechts AT eine entsprechende Multiplikation der einzelnen Kolonnen von A . Andererseits bewirkt ja Multiplikation mit einer nicht Diagonalgestalt aufweisenden Matrix T von links TA in A eine lineare Zeilenkombination und Multiplikation von rechts AT eine lineare Kombination der Kolonnen. Als einfachste Gestalt wird T für einen Schritt einer Ähnlichkeitstransformation TAT^{-1} entweder als Diagonalmatrix so gewählt werden, dass nur je eine Zeile und eine Kolonne in A verändert wird, oder als Nichtdiagonalmatrix so, dass nur zwei bestimmte Zeilen und Kolonnen miteinander kombiniert werden.

Typus A: T ist Diagonalmatrix

Es sei

$$T = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1/\alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}, \quad (5.1)$$

wo $1/\alpha$ in T , bzw. α in der Inversen T^{-1} , in der j -ten Zeile und j -ten Kolonne an Stelle von 1 steht. Eine Ähnlichkeitstransformation TAT^{-1} mit einer solchen Matrix werde im folgenden mit

$$(T_j; \alpha)$$

bezeichnet und hat auf A folgende Wirkung:

Division der j -ten Zeile durch α und Multiplikation der j -ten Kolonne mit α .

Typus B: T ist Nichtdiagonalmatrix

Es sei

$$T = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \alpha & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\alpha & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}, \quad (5.2)$$

wo α in T , bzw. $-\alpha$ in T^{-1} , in der j -ten Zeile und k -ten Kolonne steht. Die Matrix T , von links multipliziert TA , addiert in A zur j -ten Zeile das α -fache der k -ten Zeile und die Matrix T^{-1} , von rechts multipliziert AT^{-1} , subtrahiert in A von der k -ten Kolonne das α -fache der j -ten Kolonne. Demnach bedeutet eine Ähnlichkeitstransformation TAT^{-1} mit einer Matrix T von diesem Typus:

Man addiere zunächst zur j -ten Zeile von A das α -fache der k -ten Zeile und subtrahiere dann von der k -ten Spalte das α -fache der j -ten Spalte, oder auch in umgekehrter Reihenfolge.

Eine solche Umformung kann als «zweidimensionale» Transformation bezeichnet werden und sei im folgenden durch

$$(T_{jk}; \alpha)$$

dargestellt, indem die Indizes die Position von α in der dazugehörigen Matrix T und damit die zu ändernde Zeile (j) und Kolonne (k) sowie ihre Kombination kennzeichnen.

Versucht man nun, die Transformation auf die Normalform mit Hilfe dieser beiden Typen von Umformungen durchzuführen, so erkennt man bald, dass sie im wesentlichen in zwei Hauptabschnitte zerfällt: Im ersten Teil werden die Elemente unterhalb der Diagonalen behandelt, während im zweiten Teil die Elemente oberhalb und in der Diagonalen auf die gewünschte Form transformiert werden.

6. Umformung der Matrix unterhalb der Hauptdiagonalen

In diesem Abschnitt sei die Aufgabe gestellt, die gegebene Matrix $A = (a_{jk})$ mittels einer Ähnlichkeitstransformation auf die nachstehende Form zu bringen:

$$P = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} & \dots & p_{1n} \\ -1 & p_{22} & p_{23} & p_{24} & \dots & p_{2n} \\ 0 & -1 & p_{33} & p_{34} & \dots & p_{3n} \\ 0 & 0 & -1 & p_{44} & \dots & p_{4n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & p_{nn} \end{vmatrix}. \quad (6.1)$$

Dieses Problem ist allerdings bereits gelöst durch das Verfahren von HESSENBERG [8]. Doch beschreibe ich hier zur Vereinheitlichung der ganzen Transformation einen andern Weg.

Bezeichnungsweise: Zur Vereinfachung werden die Elemente der umgeformten Matrix immer wieder mit a_{jk} bezeichnet, das heisst, es sei a_{jk} der Wert des Elementes in der j -ten Zeile und k -ten Kolonne, wie er sich nach der beendeten letzten Umformung ergeben hat.

Die Transformation der Matrix unterhalb der Diagonalen kann gemäss nachstehender Vorschrift geschehen:

Regel 1: Beginnend mit der ersten Kolonne und von Kolonne zu Kolonne bis zur zweitletzten fortfahrend, führe man für die k -te Spalte ($k = 1, 2, \dots, n-1$) folgende Umformungen aus:

- Um in der $(k+1)$ -ten Zeile eine -1 zu erhalten, wende man die Transformation $(T_{k+1}; -a_{k+1, k})$ an;
- die Elemente a_{jk} ($j = k+2, k+3, \dots, n$) werden dann mit Hilfe der zweidimensionalen Transformationen $(T_{j, k+1}; a_{jk})$ zum Verschwinden gebracht.

Dass die Regel 1 den gewünschten Erfolg hat, zeige ich folgendermassen:

Voraussetzung: Die Elemente, durch welche dividiert werden muss, seien von Null verschieden.

Behauptung: Die Matrix $A = (a_{jk})$ mit komplexen Elementen a_{jk} lässt sich unter Anwendung der Regel 1 auf die Form (6.1) transformieren.

Beweis

Induktionsannahme: Die ersten $m-1$ Kolonnen weisen bereits die gewünschte Form auf, und es seien also

$$a_{k+1, k} = -1, \quad a_{jk} = 0 \quad \text{für} \quad k = 1, 2, \dots, m-1; \quad j = k+2, k+3, \dots, n.$$

Induktionsschluss: Anwendung der Regel 1 für $k = m$.

a) Nach Voraussetzung sei $a_{m+1, m} \neq 0$; die Transformation $(T_{m+1}; -a_{m+1, m})$ kann ausgeführt werden. Danach wird zuerst die $(m+1)$ -te Zeile durch $-a_{m+1, m}$ dividiert, wodurch in den ersten $(m-1)$ Kolonnen nichts geändert wird, da ja $a_{m+1, k} = 0$ ist für $k = 1, 2, \dots, m-1$; in der m -ten Kolonne wird $a_{m+1, m}$ zu -1 und in den folgenden Kolonnen werden die Elemente $a_{m+1, k}$ mit $k = m+1, m+2, \dots, n$ verändert. Dann wird noch die $(m+1)$ -te Spalte mit $-a_{m+1, m}$ multipliziert, das heisst die Elemente der nächstfolgenden Spalte. Die der m -ten vorangehenden Kolonnen werden durch diese Transformation nicht geändert.

b) Die Elemente a_{jm} ($j = m+2, m+3, \dots, n$) werden mittels der Transformation $(T_{j, m+1}; a_{jm})$ zu Null gemacht. Danach wird zuerst das a_{jm} -fache der $(m+1)$ -ten Zeile zur j -ten Zeile addiert. In den $(m-1)$ ersten Kolonnen wird dadurch wiederum nichts geändert, da nach Induktionsannahme $a_{jk} = 0$ ($k = 1, 2, \dots, m-1$) ist sowohl für $j = m+1$ als auch für $j = m+2, m+3, \dots, n$, weil in jedem Fall $j \geq (m-1) + 2$ ist. In der m -ten Kolonne ist jetzt $a_{m+1, m} = -1$, weshalb a_{jm} in Null übergeht und in den folgenden Kolonnen werden die Elemente a_{jk} ($k = m+1, m+2, \dots, n$) geändert. Dann wird noch von der $(m+1)$ -ten Spalte das a_{jm} -fache der j -ten Spalte ($j \geq m+2$) subtrahiert, das heisst, es wird nur die nächstfolgende Kolonne verändert.

Damit ist gezeigt, dass sich das Verfahren gemäss Regel 1 auf die m -te Kolonne fortsetzen lässt, ohne dabei die $m-1$ ersten Kolonnen zu ändern.

Induktionsverankerung: Sämtliche Überlegungen des Induktionsschlusses gelten sinngemäss auch für $m = 1$.

7. Diskussion

Die Transformation stösst dann auf Schwierigkeiten, falls nach beendigter Umformung der $(k-1)$ ersten Kolonnen das Element $a_{k+1, k}$ Null oder auch nur sehr klein geworden ist, durch welches im nächsten Schritt die $(k+1)$ -te Zeile der Matrix dividiert werden soll.

1. Fall: Die Transformation kann auf die k -te Kolonne ausgedehnt werden

Es sei $a_{k+1, k} = 0$, bzw. sehr klein, aber mindestens ein Element in der k -ten Spalte $a_{j, k}$ mit $k+2 \leq j \leq n$ von Null verschieden, bzw. nicht sehr klein. Durch gleichzeitige Vertauschung der j -ten mit der $(k+1)$ -ten Zeile und der entsprechenden Kolonnen kann erreicht werden, dass nun in der k -ten Spalte und $(k+1)$ -ten Zeile ein von Null verschiedenes Element steht, ohne dass dadurch das in den vorangehenden Kolonnen schon Erreichte zerstört worden wäre. An Stelle dieser Vertauschung kann auch die im Endeffekt gleichwertige zweidimensionale Transformation $(T_{k+1, j}; 1)$ eingeschaltet werden, indem die j -te Zeile zur $(k+1)$ -ten Zeile addiert und dann die $(k+1)$ -te Spalte von der j -ten Spalte subtrahiert wird. Jedenfalls wird in diesem Fall die Regel 1 auf die k -te Kolonne anwendbar.

2. Fall: Die Matrix zerfällt

Neben dem Element $a_{k+1, k}$ verschwinden sämtliche Elemente $a_{j, k}$ in der k -ten Kolonne mit $k+2 \leq j \leq n$, bzw. werden sehr klein. Dann zeichnet sich eine Unterteilung der Matrix in Untermatrizen ab:

$$A \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1, k-1} & a_{1k} & a_{1, k+1} & \dots & a_{1n} \\ -1 & a_{22} & \dots & a_{2, k-1} & a_{2k} & a_{2, k+1} & \dots & a_{2n} \\ 0 & -1 & \dots & a_{3, k-1} & a_{3k} & a_{3, k+1} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & a_{kk} & a_{k, k+1} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_{k+1, k+1} & \dots & a_{k+1, n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_{k+2, k+1} & \dots & a_{k+2, n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_{n, k+1} & \dots & a_{nn} \end{array} \right) \quad (7.1)$$

Dann lässt sich das Verfahren auf die quadratische Untermatrix rechts unter weiter anwenden, und man erhält so schliesslich eine zu A äquivalente Matrix, welche nicht die Normalform (6.1) aufweist, sondern aus Kästchen der Form (6.1) aufgebaut ist, welche sich längs der Hauptdiagonalen aufreihen. Ein

solches Kästchen kann gegebenenfalls auch nur aus einem einzigen Element bestehen, welches dann gleich einem Eigenwert von A ist. Oberhalb der Kästchen wird die Matrix im allgemeinen mit von Null verschiedenen, jedoch bedeutungslosen Elementen ausgefüllt sein. Die Untermatrizen von der Gestalt (6.1), die sich so längs der Diagonalen ergeben, brauchen aber nichts gemeinsam zu haben. Es kann sein, dass sie je voneinander verschiedene Eigenwerte besitzen, teilweise untereinander gleiche Eigenwerte aufweisen, oder dass alle Eigenwerte einer Untermatrix auch Eigenwerte einer andern sind. Zu jedem Fall lassen sich ohne weiteres Beispiele konstruieren. In gewissen Fällen ist diese Aufspaltung rein zufälliger Natur und kann durch geeignete Zeilen- und Kolonnenvertauschungen in der Ausgangsmatrix vermieden werden. In andern Fällen ist sie durch das Koordinatensystem bedingt und kann durch Übergang zu einem anderen System umgangen werden. Ganz allgemein ist diese Erscheinung immer dann vorhanden und nicht zum Verschwinden zu bringen, wenn die Matrix A mehrfache Eigenwerte besitzt, und für einen solchen der Rangabfall grösser als 1 ist, mit anderen Worten, wenn das Minimalpolynom von A nicht mit dem charakteristischen Polynom übereinstimmt. So ist es unmöglich, eine Hermitesche Matrix mit mehrfachen Eigenwerten vermittels einer Ähnlichkeitstransformation auf die Form (6.1) zu bringen. Das Versagen des Verfahrens ist demnach in diesem Fall durch die Struktur der gegebenen Matrix bedingt, worauf aber hier nicht weiter eingegangen werden soll.

8. Beendigung der Transformation für reelle Matrizen

Voraussetzung: Die Matrix A sei auf die Gestalt (6.1) transformiert, und die Kettenbruchentwicklung (2.1) für das charakteristische Polynom existiert.

Dann lässt sich die Matrix noch mit endlich vielen Umformungen vom Typus B auf die Normalform (4.8) bringen.

Geht man an die Lösung dieses Problems, so ist man versucht, die gewünschte Form einfach dadurch zu erreichen, dass man die notwendigen Elemente durch geeignete Transformationen Schritt für Schritt zu Null macht, indem man von Kolonne zu Kolonne fortschreitet. Für drei- und vierreihige Matrizen gelangt man auf diese Art auch wirklich ohne grosse Schwierigkeiten zum Ziel. Bei höherreihigen Matrizen scheint dies vorerst auch zu funktionieren, und man gelangt einmal zu einer äquivalenten Matrix, welche zwar in den $(n-1)$ ersten Kolonnen die gewünschte Gestalt aufweist, jedoch in der letzten Spalte im allgemeinen nur von Null verschiedene Elemente enthält. Will man diese noch zum Verschwinden bringen, so wird das schon Erreichte teilweise wieder zerstört. Aus diesem Grund ist die Reihenfolge der Umformungen geschickter zu wählen, und so hat sich für reelle Matrizen eine Transformation herausgebildet, welche sich in drei Teile gliedert und die sich in die folgenden Regeln zusammenfassen lässt:

Behauptung: Dann lässt sich A durch eine Ähnlichkeitstransformation in die Normalform (4.8) überführen.

Beweis: Nach Voraussetzung I kann angenommen werden, dass A schon die Form (6.1) aufweise, und es bleibt zu zeigen, dass die Anwendung der Regeln 2, 3 und 4 zum Ziel führt.

1. Regel 2

Induktionsannahme: Die ersten $(m-1)$ Kolonnen seien bereits nach Regel 2 behandelt worden und man habe oberhalb der Diagonalen:

$$a_{jk} = 0 \quad \text{für } j+k \text{ gerade} \quad (1 \leq j \leq k \leq m-1 \leq n-2). \quad (9.1)$$

Induktionsschluss: Um das Element a_{jm} mit $j+m$ gerade und $j-m$ zum Verschwinden zu bringen, werde nach Regel 2 zuerst das a_{jm} -fache der $(m+1)$ -ten Zeile zur j -ten Zeile addiert. Da in der $(m+1)$ -ten Zeile die Elemente $a_{m+1,k} = 0$ sind für $1 \leq k \leq m-1$, so wird dadurch in den $(m-1)$ ersten Kolonnen nichts geändert; da $a_{m+1,m} = -1$ ist, wird a_{jm} in Null übergeführt, und es werden in der j -ten Zeile nur die Elemente a_{jk} mit $m+1 \leq k \leq n$ verändert. Dann muss noch von der $(m+1)$ -ten Spalte das a_{jm} -fache der j -ten Spalte subtrahiert werden. Da infolge der Form (6.1) in der j -ten Kolonne nur die Elemente $a_{ij} \neq 0$ sind mit $i \leq j+1 \leq m+1$, werden dadurch nur die Elemente $a_{i,m+1}$ in der nächstfolgenden $(m+1)$ -ten Spalte in und oberhalb der Hauptdiagonalen betroffen. Insgesamt werden also nur Elemente in und oberhalb der Diagonalen verändert, die in einem späteren Schritt behandelt werden, somit ist die Transformationsmethode auf die m -te Kolonne fortsetzbar.

Zugleich ist auch ersichtlich, dass mit Ausnahme von a_{jm} alle andern Elemente in der m -ten Kolonne ungeändert bleiben, weshalb die Transformationen für die m -te Spalte unabhängig voneinander in beliebiger Reihenfolge durchgeführt werden können. Ferner sind die Umformungen nach Regel 2 immer ausführbar, da dazu nur Multiplikationen und Additionen notwendig sind.

Induktionsverankerung: Sämtliche Überlegungen des Induktionsschlusses gelten sinngemäss auch für $j=m=1$.

2. Regel 3

Voraussetzung: Nach Anwendung von Regel 2 hat man

$$a_{jk} = 0 \quad \text{für } j+k \text{ gerade} \quad (1 \leq j \leq k \leq n-1). \quad (9.2)$$

Hier ist Division durch a_{nn} erforderlich. Dies ist jetzt gleich der Spur der gegebenen Matrix A und stimmt somit mit b_{nn} in (4.8) überein. Dieses ist aber

als Folge von Voraussetzung II und Satz 1 von Null verschieden, die Division also durchführbar.

Um a_{jn} mit $j + n$ gerade und $j \leq n - 2$ zum Verschwinden zu bringen, bestimme man zunächst den Wert $\alpha_{jn} = -a_{jn}/a_{nn}$ und addiere zuerst das α_{jn} -fache der n -ten Zeile zur j -ten Zeile. Die n -te Zeile enthält nur die beiden von Null verschiedenen Elemente a_{nn} in der letzten und -1 in der zweitletzten Kolonne. Demnach wird a_{jn} zu Null, während das Element $a_{j, n-1}$ ($j < n - 1$) verändert wird, welches aber von ungerader Indexsumme und deshalb im allgemeinen auch noch von Null verschieden ist. Sodann muss noch das α_{jn} -fache der j -ten Spalte von der n -ten Spalte subtrahiert werden. In der j -ten Spalte sind jedoch nach (9.2) nur Elemente a_{ij} von ungerader Indexsumme und mit $i \leq j + 1 \leq n - 1$ von Null verschieden. Da einerseits j und n gleiche, andererseits i und j aber ungleiche Parität haben, so verändern sich in der letzten Kolonne nur Elemente a_{in} mit ungerader Indexsumme oberhalb der Diagonalen.

Damit ist gezeigt, dass unter Anwendung der Regel 3 die Elemente a_{jn} mit gerader Indexsumme und $j \leq n - 2$ in Null übergeführt werden, wobei sich insgesamt in der letzten und zweitletzten Kolonne nur die Elemente mit ungerader Indexsumme oberhalb der Diagonalen ändern.

3. Regel 4

Voraussetzung: Es ist

$$a_{jk} = 0 \quad \text{für} \quad j + k \text{ gerade} \quad (1 \leq j \leq k \leq n; j \leq n - 1). \quad (9.3)$$

Induktionsannahme: Man habe gemäss Regel 4 schon die Elemente a_{jk} in den letzten $(n - m)$ Kolonnen zum Verschwinden gebracht:

$$a_{jk} = 0 \quad \text{für} \quad j + k \text{ ungerade} \quad (1 \leq j \leq k - 3; m + 1 \leq k \leq n). \quad (9.4)$$

Induktionsschluss: Das Element a_{jm} in der m -ten Kolonne mit ungerader Indexsumme und $j \leq m - 3$ soll gemäss Regel 4 behandelt werden. Dazu bilde man zunächst den Wert $\alpha_{jm} = -a_{jm}/a_{m-1, m}$ unter der später zu rechtfertigenden Annahme, dass $a_{m-1, m} \neq 0$ sei. Dann addiere man zuerst das α_{jm} -fache der $(m - 1)$ -ten Zeile zur j -ten Zeile. Die $(m - 1)$ -te Zeile enthält nach (9.4) nur zwei von Null verschiedene Elemente, nämlich $a_{m-1, m}$ in der m -ten und -1 in der $(m - 2)$ -ten Kolonne. Somit wird a_{jm} zu Null, und $a_{j, m-2}$ mit ungerader Indexsumme und $j < m - 2$ verändert, welches in einer vorangehenden Kolonne oberhalb der Diagonalen steht. Dann muss noch das α_{jm} -fache der j -ten Spalte von der $(m - 1)$ -ten Spalte subtrahiert werden. In der j -ten Spalte sind nach (9.3) nur noch Elemente a_{ij} mit ungerader Indexsumme und mit

$$i \leq j + 1 \leq m - 2$$

von Null verschieden. Da jetzt einerseits j und $(m-1)$ gleiche, andererseits i und j ungleiche Parität haben, so ändern sich in der $(m-1)$ -ten Kolonne nur Elemente $a_{i, m-1}$ mit ungerader Indexsumme oberhalb der Diagonalen.

Damit ist erwiesen, dass sich bei der Behandlung der m -ten Kolonne nur Elemente in der $(m-1)$ -ten und $(m-2)$ -ten Kolonne mit ungerader Indexsumme oberhalb der Diagonalen ändern. Daraus ergibt sich, dass sich im speziellen die Elemente $a_{k-1, k}$ mit $m \leq k \leq n$ nicht mehr ändern, sondern bereits gleich den Elementen $b_{k-1, k}$ in der Normalform (4.8) sind. Diese sind nach Voraussetzung II und Satz 1 von Null verschieden. Im besonders ist $a_{m-1, m} \neq 0$, womit die getroffene Annahme zutrifft.

Induktionsverankerung: Sämtliche Überlegungen des Induktionsschlusses gelten sinngemäss auch für $m = n$.

Zusätze

1. *Die Matrix zerfällt in Untermatrizen.* Die Voraussetzung I ist nicht erfüllt. Wenn jedoch die Kettenbruchentwicklungen (2.1) der charakteristischen Polynome der einzelnen Untermatrizen längs der Diagonalen existieren, dann lassen sich die Regeln 2 bis 4 auf die einzelnen Kästchen anwenden.

2. *Die Kettenbruchentwicklung existiert nicht.* Die Voraussetzung II ist damit äquivalent, dass die Sturmsche Kette für das charakteristische Polynom in der Form (3.1) mit linearen Quotienten $(R_k y + S_k)$ existiert. Ist dies nicht der Fall, so zeigt sich dies dadurch an, dass entweder b_{nn} oder ein Element $b_{k-1, k}$ in (4.8) verschwindet, so dass entweder nicht nach Regel 3 oder 4 weiter transformiert werden kann. Deshalb versagt unser Verfahren in denjenigen Fällen, in denen die Sturmsche Kette (3.1) nicht existiert.

10. Verallgemeinerung des Verfahrens auf komplexe Matrizen

Die Transformation der gegebenen komplexen Matrix A in die Gestalt (6.1) lässt sich genau gleich wie im reellen Fall nach Regel 1 durchführen. Hin- gegen muss die Methode, aus der Form (6.1) die Normalform (4.7) zu gewinnen, dahin modifiziert werden, dass an Stelle der Matrix (8.1) zunächst eine solche von der Gestalt (10.1) angestrebt wird.

$$A \sim C = \left\| \begin{array}{cccccccc} i c_{11} & c_{12} & i c_{13} & c_{14} & i c_{15} & \dots & \dots & \dots \\ -1 & i c_{22} & c_{23} & i c_{24} & c_{25} & \dots & \dots & \dots \\ 0 & -1 & i c_{33} & c_{34} & i c_{35} & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & -1 & i c_{44} & c_{45} & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & i c_{n-1, n-1} & c_{n-1 n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & c_{n, n} + i c'_{n, n} \end{array} \right\| . \quad (10.1)$$

Darin sind mit Ausnahme des Elementes in der letzten Zeile und letzten Kolonne im oberen Dreieck die Elemente mit gerader Indexsumme rein imaginär oder aber reell, falls ihre Indexsumme ungerade ist. Infolge dieser Modifikation wird in jedem einzelnen Schritt entweder ein Realteil oder ein Imaginärteil eines Elementes zum Verschwinden gebracht, und deshalb wird in der Transformationsmatrix T

$$T = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \gamma & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\gamma & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} \quad (10.2)$$

γ entweder reell gleich α oder rein imaginär gleich $i\beta$ gewählt werden. Um dies zu unterscheiden, werde ich mit $(T'_{jk}; \alpha)$ die Ähnlichkeitstransformation TAT^{-1} mit reellem $\gamma = \alpha$ und mit $(T''_{jk}; \beta)$ diejenige mit rein imaginärem $\gamma = i\beta$ bezeichnen, wobei der entsprechende Wert von γ in T in der j -ten Zeile und k -ten Kolonne steht. Weiter setze ich

$$a_{jk} = a'_{jk} + i a''_{jk}, \quad (10.3)$$

und dies soll wieder der Wert des Elementes in der j -ten Zeile und k -ten Kolonne bedeuten, wie er sich nach Beendigung der letzten Umformung ergeben hat. Dann lässt sich das Verfahren in die folgenden Regeln zusammenfassen:

Regel 2a: Beginnend in der ersten Kolonne und fortschreitend von Kolonne zu Kolonne bis zur zweitletzten, werden sowohl alle Realteile a'_{jk} mit gerader Indexsumme $j+k$ und $1 \leq j \leq k \leq n-1$ mittels der Transformationen $(T'_{j,k+1}; \alpha - a'_{jk})$ wie auch alle Imaginärteile a''_{jk} mit ungerader Indexsumme $j+k$ und $1 \leq j < k \leq n-1$ mit Hilfe von $(T''_{j,k+1}; \beta = a''_{jk})$ zum Verschwinden gebracht.

Regel 3a: Die Realteile der letzten Kolonne a'_{jn} mit gerader Indexsumme $j+n$ und $j \leq n-2$ werden zum Verschwinden gebracht, indem die Transformationen $(T'_{jn}; \alpha = -a'_{jn}|a''_{nn})$ angewendet werden. Die Imaginärteile der letzten Kolonne a''_{jn} mit ungerader Indexsumme $j+n$ und $j \leq n-1$ werden in Null übergeführt, indem die Transformationen $(T''_{jn}; \beta = -a''_{jn}|a'_{nn})$ zur Anwendung gelangen.

Regel 4a: Beginnend in der letzten Kolonne und dann nach vorn fortfahrend bis zur dritten Kolonne, werden sowohl sämtliche Realteile a'_{jk} mit ungerader Indexsumme $j+k$ und $4 \leq j+3 \leq k \leq n$ durch die Transformationen $(T'_{j,k-1}; \alpha = -a'_{jk}|a'_{k-1,k})$ als auch alle Imaginärteile a''_{jk} mit gerader Indexsumme $j+k$

und $3 \leq j + 2 \leq k \leq n$ mit Hilfe der Transformationen $(T''_{j, k-1}; \beta = -a''_{jk}/a'_{k-1, k})$ in Null übergeführt.

Bei der Durchführung der Umformungen hat man auch hier innerhalb der einzelnen Regeln bestimmte Freiheiten in der Reihenfolge der zweidimensionalen Transformationen.

Dass die beschriebene Methode unter den gleichen Voraussetzungen wie im reellen Fall und unter strikter Anwendung der Regeln 1, 2a, 3a und 4a zur Normalform (4.7) führt, lässt sich mit den genau gleichen Überlegungen wie für reelle Matrizen beweisen. Der Unterschied besteht nur darin, dass man erstens zwischen den beiden Arten von Transformationen (γ reell oder rein imaginär) und zweitens zwischen reellen und rein imaginären Elementen zu unterscheiden hat. Deshalb sehe ich von der Wiedergabe dieses evidenten Beweises ab.

11. Ergänzungen

a) Berechnung des charakteristischen Polynoms $P(\lambda)$

$P(\lambda) = |\lambda E - A| = |\lambda E - B|$ lässt sich aus der reduzierten Matrix (4.7) bzw. (4.8) auf bekanntem Weg rekursiv wie folgt berechnen: Man beginne mit

$$p_{-1}(\lambda) = 0, \quad p_0(\lambda) = 1$$

und bestimme dann die Polynome $p_k(\lambda)$

$$p_{k+1}(\lambda) = (\lambda - i b'_{k+1, k+1}) p_k(\lambda) + b_{k, k+1} p_{k-1}(\lambda) \quad (11.1)$$

bzw. im reellen Fall

$$p_{k+1}(\lambda) = \lambda p_k(\lambda) + b_{k, k+1} p_{k-1}(\lambda) \quad (11.2)$$

($k = 0, 1, 2, \dots, n-1$). Dann ist

$$P(\lambda) = p_n(\lambda) + (-1)^{n-1} b_{nn} p_{n-1}(\lambda). \quad (11.3)$$

b) Zur Wahl der Reihenfolge der Umformungen

Die Freiheit in der Wahl der Reihenfolge der Umformungen nach Regel 2, bzw. Regel 2a, kann numerisch dahin ausgenützt werden, die Reihenfolge derart zu wählen, dass die entstehenden Elemente möglichst kleinen Rundungsfehlern unterworfen werden. So lässt es sich hie und da vermeiden, dass unvermittelt sehr grosse Werte entstehen. Numerische Versuche in dieser Hinsicht lassen vermuten, dass durch Anwendung der angegebenen Regel 2, bzw. 2a, die Zahlwerte der beeinflussbaren Elemente günstig ausfallen, falls

man die Elemente pro Kolonne oben beginnend zu Null macht. Diese Reihenfolge weist jedenfalls den beachtlichen Vorteil auf, gegenüber jeder andern Anordnung der zweidimensionalen Transformationen am wenigsten Multiplikationen zu benötigen.

c) *Zerlegung der Transformationsmatrix in Links- und Rechtsdreiecksmatrix*

Die Ähnlichkeitstransformation der gegebenen Matrix A in die Matrix P von der Gestalt (6.1) geschieht nach Regel 1 in einzelnen Schritten, in denen die Transformationsmatrix entweder Diagonalform ($k+1 \geq 2$ in Regel 1a) aufweist oder eine besondere Linksdreiecksmatrix ($j > k+1 \geq 2$ in Regel 1b) ist. Da das Produkt von Linksdreiecksmatrizen und Diagonalmatrizen selbst wieder eine Linksdreiecksmatrix ist, so hat die Matrix L in der Transformation

$$LAL^{-1} = P \quad (11.4)$$

folgende Form:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & l_{22} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & l_{32} & l_{33} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & l_{42} & l_{43} & l_{44} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & l_{n2} & l_{n3} & l_{n4} & \dots & l_{nn} \end{pmatrix}. \quad (11.5)$$

Andererseits erfordert die Ähnlichkeitstransformation von P in die Normalform B gemäss den Regeln 2 bis 4 (2a bis 4a) lauter Umformungen mit Rechtsdreiecksmatrizen, deren Diagonalelemente gleich 1 sind. Somit ist die Matrix R in der Transformation

$$RPR^{-1} = B \quad (11.6)$$

eine Rechtsdreiecksmatrix mit 1 in der Diagonalen:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} & r_{14} & \dots & r_{1n} \\ 0 & 1 & r_{23} & r_{24} & \dots & r_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & r_{34} & \dots & r_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}. \quad (11.7)$$

Damit zerfällt die Transformationsmatrix T in

$$TAT^{-1} = B \quad (11.8)$$

auf natürliche Weise nach (11.4) und (11.6) in ein Produkt einer Rechts- und einer speziellen Linksdreiecksmatrix:

$$T = R L. \quad (11.9)$$

d) Der Rechenaufwand des Verfahrens

Der Rechenaufwand eines Verfahrens soll gemessen werden mit der Anzahl der notwendigen Multiplikationen und Divisionen. Um die Stabilitätsfrage einer reellen Matrix von der Ordnung n zu beantworten, braucht es bekanntlich mit dem Verfahren von WEBER-VOETTER [7] und mit der Methode der Sturmschen Kette [5] insgesamt eine Zahl von Multiplikationen und Divisionen, welche sich asymptotisch wie n^3 verhält. Die Abzählung der Operationen des hier beschriebenen Verfahrens zur Reduktion der gegebenen Matrix auf die Normalform (4.8) ergibt einen Rechenaufwand, der sich asymptotisch ebenfalls wie n^3 verhält. In dieser Hinsicht sind also die beiden Wege gleichwertig.

e) Zusammenhang des Verfahrens mit der Methode der Sturmschen Kette

Ein enger Zusammenhang zwischen den beiden Methoden ist ersichtlich, wenn man auf die nachstehende begleitende Matrix (11.10) die Rechenvorschriften anwendet:

$$C = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & c_0 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & c_1 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & c_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & c_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & c_{n-1} \end{vmatrix}. \quad (11.10)$$

In der letzten Kolonne der Matrix C stehen im wesentlichen die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms

$$P(\lambda) = \lambda^n - c_{n-1} \lambda^{n-1} + c_{n-2} \lambda^{n-2} - + \dots + (-1)^{n-1} c_1 \lambda + (-1)^n c_0,$$

und die Ausgangspolynome $F_0(y)$ und $F_1(y)$ für die Sturmsche Kette sind gemäss (3.2)

$$F_0(y) = y^n - c_{n-2} y^{n-2} + c_{n-4} y^{n-4} - c_{n-6} y^{n-6} + \dots,$$

$$F_1(y) = -c_{n-1} y^{n-1} + c_{n-3} y^{n-3} - c_{n-5} y^{n-5} + \dots$$

Nach Anwendung der Regel 3, welche die Elemente der letzten Kolonne mit geraden Indexsummen in Null überführt, erscheinen in der letzten Spalte an den Plätzen mit ungeraden Indexsummen im wesentlichen die Koeffizienten des ersten Restpolynoms $F_2(y)$. In der zweitletzten Kolonne hingegen stehen nun an den Plätzen mit ungeraden Indexsummen im wesentlichen die Koeffizienten des Polynoms $F_1(y)$, welche aber durch c_{n-1} dividiert sind. Im übrigen hat sich in der Matrix nichts geändert.

Nun werde die Regel 4 auf die letzte Kolonne angewendet: Die bewirkt, dass in der zweitletzten Spalte bis auf einen Proportionalitätsfaktor die Koeffizienten des Restpolynoms $F_3(y)$ in Erscheinung treten, in der drittletzten Kolonne diejenigen von $F_2(y)$, welche aber durch den Koeffizienten der höchsten Potenz dividiert sind. Führt man nach Regel 4 fort, so lässt sich allgemein zeigen, dass im wesentlichen und bis auf Proportionalitätsfaktoren für $k = n, n-1, \dots, 5, 4$ in der k -ten Kolonne die Koeffizienten von $F_{n-k+2}(y)$ und in der vorangehenden $(k-1)$ -ten Spalte diejenigen von $F_{n-k+1}(y)$ stehen. Für $k=3$ dagegen steht in der dritten Spalte im wesentlichen der Koeffizient von $F_{n-1}(y)$ und in der zweiten Kolonne derjenige von $F_n(y)$.

Somit stellen die Regeln 3 und 4 in diesem speziellen Fall eine besondere Form des euklidischen Algorithmus dar.

12. Beispiele

1. Reelle Matrix

Unterhalb den Matrizen ist die angewendete zweidimensionale Umformung angegeben, welche zur nächsten äquivalenten Matrix führt.

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

Regel 1:

$$(T_2; -3)$$

$$\sim \begin{vmatrix} 1 & -9 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -0,333\,333 & 0 \\ -1 & -3 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$(T_{32}; -1)$$

$$\sim \begin{vmatrix} 1 & -10,000\,000 & -1,000\,000 & 2,000\,000 \\ -1 & -0,333\,333 & -0,333\,333 & 0 \\ 0 & 1,333\,333 & 4,333\,333 & -1,000\,000 \\ 2 & -1,000\,000 & -1,000\,000 & 3,000\,000 \end{vmatrix}$$

$$(T_{42}; 2)$$

$$\sim \begin{vmatrix} 1 & -14,000\,000 & -1,000\,000 & 2,000\,000 \\ -1 & -0,333\,333 & -0,333\,333 & 0 \\ 0 & 3,333\,333 & 4,333\,333 & -1,000\,000 \\ 0 & -7,666\,667 & -1,666\,667 & 3,000\,000 \end{vmatrix}$$

(T_3 ; -3,333 333)

$$\sim \begin{vmatrix} 1 & -14,000\,000 & 3,333\,333 & 2,000\,000 \\ -1 & -0,333\,333 & 1,111\,110 & 0 \\ 0 & -1 & 4,333\,333 & 0,300\,000 \\ 0 & -7,666\,667 & 5,555\,556 & 3,000\,000 \end{vmatrix}$$

(T_{43} ; -7,666 667)

$$\sim \begin{vmatrix} 1 & -14,000\,000 & 18,666\,667 & 2,000\,000 \\ -1 & -0,333\,333 & 1,111\,110 & 0 \\ 0 & -1 & 6,633\,333 & 0,300\,000 \\ 0 & 0 & -22,299\,998 & 0,700\,000 \end{vmatrix}$$

(T_4 ; 22,299 998)

$$\sim \begin{vmatrix} 1 & -14,000\,000 & 18,666\,667 & 44,599\,996 \\ -1 & -0,333\,333 & 1,111\,110 & 0 \\ 0 & -1 & 6,633\,333 & 6,689\,999 \\ 0 & 0 & -1 & 0,700\,000 \end{vmatrix}$$

Regel 2:

(T_{12} ; 1)

$$\sim \begin{vmatrix} 0 & -14,333\,333 & 19,777\,777 & 44,599\,996 \\ -1 & 0,666\,667 & 1,111\,110 & 0 \\ 0 & -1 & 6,633\,333 & 6,689\,999 \\ 0 & 0 & -1 & 0,700\,000 \end{vmatrix}$$

(T_{23} ; 0,666 667)

$$\sim \begin{vmatrix} 0 & -14,333\,333 & 29,333\,337 & 44,599\,996 \\ -1 & 0 & 5,533\,334 & 4,460\,002 \\ 0 & -1 & 7,300\,000 & 6,689\,999 \\ 0 & 0 & -1 & 0,700\,000 \end{vmatrix}$$

(T_{14} ; 29,333 337)

$$\sim \begin{vmatrix} 0 & -14,333\,333 & 0 & 65,133\,332 \\ -1 & 0 & 5,533\,334 & 33,793\,339 \\ 0 & -1 & 7,300\,000 & 6,689\,999 \\ 0 & 0 & -1 & 0,700\,000 \end{vmatrix}$$

(T_{34} ; 7,300 000)

$$\sim \begin{vmatrix} 0 & -14,333\,333 & 0 & 65,133\,332 \\ -1 & 0 & 5,533\,334 & -6,599\,999 \\ 0 & -1 & 0 & 11,799\,999 \\ 0 & 0 & -1 & 8,000\,000 \end{vmatrix}$$

Regel 3:

(T_{24} ; 0,825 000)

$$\sim \begin{vmatrix} 0 & -14,333\,333 & 0 & 76,958\,332 \\ -1 & 0 & 4,708\,334 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 12,624\,999 \\ 0 & 0 & -1 & 8,000\,000 \end{vmatrix}$$

Regel 4:

$$(T_{13}; -6,095\,710)$$

$$B = \begin{vmatrix} 0 & -8,237\,623 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1,387\,376 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 12,624\,999 \\ 0 & 0 & -1 & 8,000\,000 \end{vmatrix}$$

Da nun $b_{44} > 0$, $b_{34} > 0$, $b_{23} < 0$, $b_{12} < 0$ ist, und nach Satz 6 in der Folge von Produkten $b_{44} > 0$, $b_{44} b_{34} > 0$, $b_{44} b_{34} b_{23} < 0$, $b_{44} b_{34} b_{23} b_{12} > 0$, drei positiv und eines negativ sind, so haben drei Eigenwerte von A positive und einer negativen Realteil (vgl. dazu R. ZURMÜHL [8], Seiten 295–296).

Entwicklung des charakteristischen Polynoms nach (11.2) und (11.3) ergibt:

$$\begin{aligned} p_{-1}(\lambda) &= 0, \\ p_0(\lambda) &= 1, \\ p_1(\lambda) &= \lambda, \\ p_2(\lambda) &= \lambda^2 - 8,237\,623, \\ p_3(\lambda) &= \lambda^3 - 9,624\,999\lambda, \\ p_4(\lambda) &= \lambda^4 + 3,000\,000\lambda^2 - 103,999\,982, \\ P(\lambda) &= p_4(\lambda) + (-1)^3 8,000\,000 p_3(\lambda), \\ P(\lambda) &= \lambda^4 - 8\lambda^3 + 3\lambda^2 + 76,999\,992\lambda - 103,999\,982. \end{aligned}$$

Das exakte charakteristische Polynom lautet

$$P(\lambda) = \lambda^4 - 8\lambda^3 + 3\lambda^2 + 77\lambda - 104.$$

Die Rundungsfehler in den Koeffizienten des linearen und konstanten Gliedes sind bei der verwendeten Rechengenauigkeit von 6 Stellen nach dem Komma zu erwarten.

2. Komplexe Matrix

$$A = \begin{vmatrix} -0,0560 - 15,1900i & 0,2856 + 4,7820i & -0,0207 + 3,4710i & 0,0138 - 1,7190i \\ -0,0318 - 6,4510i & 0,0095 + 0,4850i & -0,0105 + 2,1100i & -0,0153 - 0,3460i \\ -0,0428 + 2,4600i & -0,1762 - 2,9980i & -0,0859 - 17,6620i & -0,4729 - 0,9820i \\ -0,0244 + 1,1550i & -0,0617 - 1,3540i & -0,0391 - 7,1490i & -0,3845 - 1,0590i \end{vmatrix}$$

Die Umformung nach Regel 1 bietet hier nichts Neues, weshalb diese Transformationen nicht wiedergegeben werden. Man erhält:

$$P = \begin{vmatrix} -0,0560 - 15,1900i & -24,2869 + 2,1361i & -4,0878 + 68,6431i & 14,5697 + 4,9694i \\ -1 & 0,0326 - 0,2574i & 7,5268 + 0,4708i & 0,1335 - 0,4619i \\ 0 & -1 & -0,3091 - 17,2946i & 0,4362 - 0,0571i \\ 0 & 0 & -1 & -0,1844 - 0,6840i \end{vmatrix}$$

1. Regel 2a:

$$(T'_{12}; \alpha = -0,0560)$$

$$\sim \begin{vmatrix} -15,1900i & -24,2888 + 1,2999i & -4,5093 + 68,6167i & 14,5622 + 4,9953i \\ -1 & -0,0234 - 0,2574i & 7,5268 + 0,4708i & 0,1355 - 0,4619i \\ 0 & -1 & -0,3091 - 17,2946i & 0,4362 - 0,0571i \\ 0 & 0 & -1 & -0,1844 - 0,6840i \end{vmatrix}$$

$$(T'_{13}; \beta = 1,2999) \text{ und } (T'_{23}; \alpha = -0,0234)$$

$$\sim \begin{vmatrix} -15,1900i & -24,2888 & -2,3419 + 68,2150i & 14,6364 + 5,5623i \\ -1 & -0,2574i & 7,5340 + 2,1693i & 0,1233 - 0,4606i \\ 0 & -1 & -0,3325 - 17,2946i & 0,4362 - 0,0571i \\ 0 & 0 & -1 & -0,1844 - 0,6840i \end{vmatrix}$$

$$(T'_{14}; \alpha = -2,3419); (T'_{24}; \beta = 2,1639) \text{ und } (T'_{34}; \alpha = -0,3325)$$

$$\sim \begin{vmatrix} -15,1900i & -24,2888 & 68,2150i & 15,0683 + 46,9597i \\ -1 & -0,2574i & 7,5340 & 1,2115 - 0,8607i \\ 0 & -1 & -17,2946i & 0,4975 - 3,4101i \\ 0 & 0 & -1 & -0,5169 - 0,6840i \end{vmatrix}$$

2. Regel 3a:

$$(T''_{14}; \beta = 90,8487); (T'_{24}; \alpha = 2,3419) \text{ und } (T''_{34}; \beta = -6,5971)$$

$$\sim \begin{vmatrix} -15,1900i & -24,2888 & -22,6337i & -1096,5394 \\ -1 & -0,2574i & 5,1903 & 123,2293i \\ 0 & -1 & -10,6974i & 68,9012 \\ 0 & 0 & -1 & -0,5169 - 7,2811i \end{vmatrix}$$

3. Regel 4a:

$$(T'_{13}; \alpha = 15,9147) \text{ und } (T''_{23}; \beta = -1,7885)$$

$$\sim \begin{vmatrix} -15,1900i & -40,2034 & -23,0395i & 0 \\ -1 & 1,5311i & -0,7656 & 0 \\ 0 & -1 & -12,4859i & 68,9012 \\ 0 & 0 & -1 & -0,5169 - 7,2811i \end{vmatrix}$$

$$(T''_{12}; \beta = -30,0941)$$

$$B = \begin{vmatrix} 14,9041i & -442,6538 & 0 & 0 \\ -1 & -28,5631i & -0,7656 & 0 \\ 0 & -1 & -12,4859i & 68,9012 \\ 0 & 0 & -1 & -0,5169 - 7,2811i \end{vmatrix}$$

Hier ist $b_{44} < 0$, $b_{34} > 0$, $b_{23} < 0$ und $b_{12} < 0$, und damit $b_{44} < 0$, $b_{44} b_{34} < 0$, $b_{44} b_{34} b_{23} > 0$, $b_{44} b_{34} b_{23} b_{12} < 0$, weshalb nach Satz 6 ein Eigenwert von A mit positivem Realteil vorhanden ist, während die drei übrigen negativen Realteil aufweisen.

Das charakteristische Polynom lässt sich nach (11.1) und (11.3) berechnen:

$$p_{-1}(\lambda) = 0,$$

$$p_0(\lambda) = 1,$$

$$p_1(\lambda) = \lambda - 14,9041i,$$

$$\begin{aligned}
p_2(\lambda) &= (\lambda + 28,5631i) p_1(\lambda) - 442,6538 p_0(\lambda) \\
&= \lambda^2 + 13,6590i \lambda - 16,9468, \\
p_3(\lambda) &= (\lambda + 12,4859i) p_2(\lambda) - 0,7656 p_1(\lambda) \\
&= \lambda^3 + 26,1449i \lambda^2 - 188,2569 \lambda - 200,1856i, \\
p_4(\lambda) &= (\lambda + 7,2811i) p_3(\lambda) + 68,9012 p_2(\lambda) \\
&= \lambda^4 + 33,4260i \lambda^3 - 309,7201 \lambda^2 - 629,7919i \lambda + 289,9266, \\
P(\lambda) &= p_4(\lambda) + 0,5169 p_3(\lambda), \\
P(\lambda) &= \lambda^4 + (0,5169 + 33,4260i) \lambda^3 + (-309,7201 + 13,5143i) \lambda^2 \\
&\quad + (-97,3100 - 629,7919i) \lambda + (289,9266 - 103,4759i).
\end{aligned}$$

Anmerkung: Das Beispiel wurde ursprünglich mit grösserer Stellenzahl durchgerechnet, aber hier mit den auf 4 Stellen nach dem Komma gerundeten Werten angeführt.

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] E. J. ROUTH, *The Advanced Part of a Treatise on the Dynamics of a System of Rigid Bodies* (Macmillan 1905), S. 223–231.
- [2] A. HURWITZ, *Math. Ann.* 46, 273–284 (1895).
- [3] NYQUIST, *Regeneration Theory*, *Bell Syst. techn. J.* 1932, 126.
- [4] L. CREMER, *Z. angew. Math. Mech.* 1947, 161–163.
- [5] A. WILLERS, *Methoden der praktischen Analysis* (Berlin 1950), S. 290–296.
- [6] H. S. WALL, *Analytic Theory of Continued Fractions* (New York 1948), S. 182–185.
- [7] H. VOETTER, *Z. angew. Math. Phys.* 3, 314–315 (1952).
- [8] R. ZURMÜHL, *Matrizen* (Berlin 1950), S. 316–324.
- [9] C. LANCZOS, *An Iteration Method for the Solution of the Eigenvalue Problem of Linear Differential and Integral Operators*, *J. Res. Nat. Bur. Stand.* 45, 255–282 (1950).
- [10] H. RUTISHAUSER, *Beiträge zur Kenntnis des Biorthogonalisierungsalgorithmus von C. Lanczos*, *Z. angew. Math. Phys.* 4, 35–56 (1953).

Summary

Given the eigenvalue problem $(A - \lambda E) x = 0$ for real or complex matrices A the number of eigenvalues λ with positive real parts is determined without evaluating the characteristic polynomial. A proceeding is developed here to transform the given matrix A into a reduced form by applying a finite series of elementary transformations upon the matrix. The elements of the reduced matrix allow immediately to solve the problem.

(Eingegangen: 19. Juni 1956.)

Free Lateral Vibration of Beams of Variable Cross Section

By EDWARD W. SUPPGER, Princeton, N. J., USA¹⁾,
and NAZIH J. TALEB, Beirut, Lebanon²⁾

1. Introduction

The problem of free lateral vibration of non-prismatical beams, i. e., the determination of the natural frequencies and the shapes of the deflection curve during vibration, is of current interest since gaps exist in the considerable work accomplished in the past in this field. KIRCHHOFF [1]³⁾ was the first to solve the governing differential equation for the case of the conical cantilever beam and for the wedge-shaped cantilever with small vertex angle. CAPELLEN [2] presented a series solution for the cantilever of triangular width; MORROW [3] utilized an integral method and gave several applications; NICHOLSON [4] studied the double cone and some solids of revolution; MONONOBE [5] considered the hollow truncated cone; and WRINCH [6] the solid circular cone (for the higher frequencies and modal shapes). Other contributions were made by ONO [7] and HORT [8]. The integral equation method was presented by SCHWE-RIN [9], TEMPLE and BICKLEY [10], [11], and WHITE [12].

This paper deals only with the approach by the differential equation of motion for beams with cross sectional areas and moments of inertia that vary in an exponential manner. Solutions are obtained for beams with different end conditions, and for two specific examples. For simplicity only, the calculations are limited to the first and second modes.

Notation

x, y, z	Rectangular coordinates,
L	span of beam,
$A(x)$	cross sectional area,
$I(x)$	moment of inertia of cross section,
X	normal function for beam,
X_i	the i -th normal function,
T	function of time,
ϕ_i	circular frequency for the i -th mode,

¹⁾ Princeton University.

²⁾ American University of Beirut.

³⁾ Numbers in brackets refer to References, page 519.

g	gravitational acceleration,
t	time,
γ	weight per unit volume,
E	modulus of elasticity,
$A_i B_i C_i$	
$K k c$	constants,
r_i	the i -th root of an algebraic equation,
R, r	radii.

2. Formulation of the Problem

The well-known [13] differential equation⁴⁾ for free lateral vibration of a beam is

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(E I \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) = - \frac{\gamma A}{g} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \quad (1)$$

We seek solutions $y(x, t)$ that satisfy equation (1) as well as the boundary conditions and the initial condition. For a beam, the boundary conditions are: ends simply supported, fixed, or free. For the initial conditions we assume that y and \dot{y} are known at $t = 0$.

To find $y(x, t)$ that satisfies equation (1) let

$$y = X(x) T(t); \quad (2)$$

substitution of equation (2) into equation (1) gives

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(E I \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} \right) T + \frac{\gamma A}{g} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} X = 0$$

or

$$\frac{g}{\gamma A} \cdot \frac{1}{X} \cdot \frac{d^2}{dx^2} \left(E I \frac{d^2 X}{dx^2} \right) + \frac{1}{T} \cdot \frac{d^2 T}{dt^2} = 0; \quad (3)$$

the first term is independent of t and the second of x . For a solution of equation (1), evidently each term in equation (3) is constant. Let

$$\frac{1}{T} \cdot \frac{d^2 T}{dt^2} = \text{const} = -p^2 \quad (4)$$

which gives

$$T = A \cos p t + B \sin p t \quad (5)$$

and from equations (3) and (4) we obtain

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(E I \frac{d^2 X}{dx^2} \right) = p^2 \frac{\gamma A}{g} X \quad (6)$$

⁴⁾ The effects of rotatory inertia and shearing force are neglected.

or

$$I \frac{d^4 X}{dx^4} + 2 \frac{dI}{dx} \cdot \frac{d^3 X}{dx^3} + \frac{d^2 I}{dx^2} \cdot \frac{d^2 X}{dx^2} = \frac{p^2 \gamma A}{E g} X \quad (7)$$

from which $X(x)$ is to be determined, subject to the boundary conditions for any given beam. Since equation (7) does not allow an elementary solution in terms of $A(x)$, $I(x)$ and its derivatives, we shall assign certain expressions to $A(x)$ and $I(x)$ in order to simplify the solution. Equation (7) is the 'eigenvalue equation' and the problem is to determine the values of p_i^2 (the 'eigenvalues' or 'characteristic' values) for which it has non-trivial solutions under the prescribed boundary conditions. The corresponding solutions $X_i(x)$ are called 'eigenfunctions'. These solutions are not unique since if X_i is a solution of equation (7), so is $C X_i$ where C is a constant. Since equation (1) is linear, we may write its general solution as

$$y(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} X_i (A_i \cos p_i t + B_i \sin p_i t) \quad (8)$$

wherein the constants A_i and B_i are determined from the known initial conditions in the following manner.

If X_m and X_n are any two solutions of equation (6) we may write

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(I \frac{d^2 X_m}{dx^2} \right) - \frac{p_m^2 \gamma A}{E g} X_m = 0$$

and

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(I \frac{d^2 X_n}{dx^2} \right) - \frac{p_n^2 \gamma A}{E g} X_n = 0.$$

Multiply the first of these two equations by $-X_n$, the second by X_m , add and integrate over x from 0 to L . Thus

$$\left. \begin{aligned} \frac{\gamma}{E g} (p_m^2 - p_n^2) \int_0^L A X_m X_n dx &= \int_0^L \left[X_n \frac{d^2}{dx^2} \left(I \frac{d^2 X_m}{dx^2} \right) - X_m \frac{d^2}{dx^2} \left(I \frac{d^2 X_n}{dx^2} \right) \right] dx \\ &= X_n \frac{d}{dx} \left(I \frac{d^2 X_m}{dx^2} \right) \Big|_0^L - \int_0^L \frac{d}{dx} \left(I \frac{d^2 X_m}{dx^2} \right) \frac{dX_n}{dx} dx \\ &\quad - X_m \frac{d}{dx} \left(I \frac{d^2 X_n}{dx^2} \right) \Big|_0^L + \int_0^L \frac{d}{dx} \left(I \frac{d^2 X_n}{dx^2} \right) \frac{dX_m}{dx} dx \\ &= X_n \frac{d}{dx} \left(I \frac{d^2 X_m}{dx^2} \right) \Big|_0^L - \frac{dX_n}{dx} \left(I \frac{d^2 X_m}{dx^2} \right) \Big|_0^L \\ &\quad - X_m \frac{d}{dx} \left(I \frac{d^2 X_n}{dx^2} \right) \Big|_0^L + \frac{dX_m}{dx} \left(I \frac{d^2 X_n}{dx^2} \right) \Big|_0^L \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

For a beam, each end (i. e., for $x = 0$ or $x = L$) is either simply supported, fixed, or free. At a simply supported end, the deflection and bending moment are zero, thus

$$X = I \frac{d^2 X}{dx^2} = 0.$$

At a fixed end, the deflection and the slope are zero

$$X = \frac{dX}{dx} = 0.$$

At a free end, the bending moment and the shear are zero

$$I \frac{d^2 X}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(I \frac{d^2 X}{dx^2} \right) = 0.$$

It follows that the terms on the right side of equation (9) all vanish. Hence

$$(\dot{p}_m^2 - \dot{p}_n^2) \int_0^L A X_m X_n dx = 0.$$

If $(\dot{p}_m^2 - \dot{p}_n^2) \neq 0$ then

$$\int_0^L A X_m X_n dx = 0 \quad (m \neq n). \quad (10)$$

To determine the A_i and B_i of equation (8) in terms of the given initial conditions, we assume that

$$(y)_{t=0} = f(x), \quad (\dot{y})_{t=0} = g(x).$$

Equations (8) gives

$$\dot{y} = \sum_{i=1}^{\infty} X_i (-\dot{p}_i A_i \sin p_i t + \dot{p}_i B_i \cos p_i t). \quad (11)$$

Thus

$$\sum_{i=1}^{\infty} A_i X_i = f(x), \quad \sum_{i=1}^{\infty} \dot{p}_i B_i X_i = g(x).$$

Multiply both these equations by X_j and integrate

$$\int_0^L A_j X_j^2 dx = \int_0^L f(x) X_j dx, \quad \int_0^L \dot{p}_j B_j X_j^2 dx = \int_0^L g(x) X_j dx$$

or

$$A_j = \frac{\int_0^L f(x) X_j dx}{\int_0^L X_j^2 dx} \quad \text{and} \quad B_j = \frac{\int_0^L g(x) X_j dx}{\dot{p}_j \int_0^L X_j^2 dx}, \quad (12)$$

i. e., the constants A_i and B_i can be calculated after an expression for X_i has been found that satisfies equation (7) and the boundary conditions. Substituting the A_i and B_i back into equation (8) we obtain the unique solution of equation (1).

3. Solution for X

To simplify the solution of equation (7) for X , we assume

$$A(x) = A_0 e^{cx/L} = A_0 e^{bx}, \quad I(x) = I_0 e^{cx/L} = I_0 e^{bx} \quad (13)$$

wherein b and c are arbitrary constants (note that the radius of gyration of the cross section of the beam is constant).

Substitution of equation (13) into equation (7) gives us an equation with constant coefficients

$$\frac{d^4 X}{dx^4} + 2b \frac{d^3 X}{dx^3} + b^2 \frac{d^2 X}{dx^2} - \frac{p^2 \gamma A_0}{E g I_0} X = 0. \quad (14)$$

The general solution of equation (14) is

$$X = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e^{r_i x}$$

where r_i are the roots of the characteristic equation

$$r^4 + 2b r^3 + b^2 r^2 - \frac{p^2 \gamma A_0}{E g I_0} = 0. \quad (15)$$

Let

$$K^2 = p^2 \frac{\gamma A_0}{E g I_0} \quad (16)$$

then equation (15) may be written as

$$(r^2 + b r - K)(r^2 + b r + K) = 0,$$

i. e.,

$$r^2 + b r - K = 0 \quad \text{or} \quad r^2 + b r + K = 0$$

and the roots are

$$r_i = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 \pm 4K}}{2}.$$

Let

$$S_1 = \sqrt{4K + b^2} \quad \text{and} \quad S_2 = \sqrt{4K - b^2} \quad (17)$$

wherein $4K > b^2$. The four roots are

$$r_1 = \frac{-b + S_1}{2}, \quad r_2 = \frac{-b - S_1}{2}, \quad r_3 = \frac{-b + i S_2}{2}, \quad r_4 = \frac{-b - i S_2}{2}$$

and the general solution of equation (14) may be written as

$$X = e^{-b x/2} (a_1 e^{S_1 x/2} + a_2 e^{-S_1 x/2} + a_3 e^{i S_2 x/2} + a_4 e^{-i S_2 x/2})$$

let

$$a_1 = \alpha + \beta \quad \text{and} \quad a_2 = \alpha - \beta$$

then

$$\begin{aligned} a_1 e^{S_1 x/2} + a_2 e^{-S_1 x/2} &= (\alpha + \beta) e^{S_1 x/2} + (\alpha - \beta) e^{-S_1 x/2} \\ &= 2\alpha \cosh \frac{S_1 x}{2} + 2\beta \sinh \frac{S_1 x}{2} \end{aligned}$$

and

$$e^{i S_2 x/2} = \cos \frac{S_2 x}{2} + i \sin \frac{S_2 x}{2}, \quad e^{-i S_2 x/2} = \cos \frac{S_2 x}{2} - i \sin \frac{S_2 x}{2},$$

we may now write X as follows

$$X = e^{-b x/2}$$

$$\times \left(2\alpha \cosh \frac{S_1 x}{2} + 2\beta \sinh \frac{S_1 x}{2} + [a_3 + a_4] \cos \frac{S_2 x}{2} + [a_3 - a_4] i \sin \frac{S_2 x}{2} \right)$$

or

$$X = e^{-b x/2} \left(C_1 \cosh \frac{S_1 x}{2} + C_2 \sinh \frac{S_1 x}{2} + C_3 \cos \frac{S_2 x}{2} + C_4 \sin \frac{S_2 x}{2} \right) \quad (18)$$

wherein C_1, C_2, C_3, C_4 are constants.

In order to formulate the boundary conditions we shall need the following derivatives of X

$$\left. \begin{aligned} X' = \frac{dX}{dx} &= e^{-b x/2} \left\{ C_1 \left[S_1 \sinh \frac{S_1 x}{2} - b \cosh \frac{S_1 x}{2} \right] \right. \\ &\quad + C_2 \left[S_1 \cosh \frac{S_1 x}{2} - b \sinh \frac{S_1 x}{2} \right] \\ &\quad + C_3 \left[-S_2 \sin \frac{S_2 x}{2} - b \cos \frac{S_2 x}{2} \right] \\ &\quad \left. + C_4 \left[S_2 \cos \frac{S_2 x}{2} - b \sin \frac{S_2 x}{2} \right] \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

$$\left. \begin{aligned} X'' = \frac{d^2 X}{dx^2} &= e^{-b x/2} \left\{ C_1 \left[-\frac{b S_1}{2} \sinh \frac{S_1 x}{2} + \frac{(S_1^2 + b^2)}{4} \cosh \frac{S_1 x}{2} \right] \right. \\ &\quad + C_2 \left[\frac{(S_1^2 + b^2)}{4} \sinh \frac{S_1 x}{2} - \frac{b S_1}{2} \cosh \frac{S_1 x}{2} \right] \\ &\quad + C_3 \left[\frac{b S_2}{2} \sin \frac{S_2 x}{2} + \frac{(b^2 - S_2^2)}{4} \cos \frac{S_2 x}{2} \right] \\ &\quad \left. + C_4 \left[\frac{(b^2 - S_2^2)}{4} \sin \frac{S_2 x}{2} - \frac{b S_2}{2} \cos \frac{S_2 x}{2} \right] \right\} \\ &= e^{-b x/2} \{ C_1 f(x) + C_2 g(x) + C_3 h(x) + C_4 j(x) \}, \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

$$X''' = \frac{d^3 X}{dx^3} = e^{-bx/2} \left\{ C_1 \left[-\frac{b S_1^2}{4} \cosh \frac{S_1 x}{2} + \frac{b^2 S_1}{4} \sinh \frac{S_1 x}{2} \right. \right. \\ \left. \left. + (S_1^2 + b^2) \left(\frac{S_1}{8} \sinh \frac{S_1 x}{2} - \frac{b}{8} \cosh \frac{S_1 x}{2} \right) \right] \right. \\ \left. + C_2 \left[(S_1^2 + b^2) \left(\frac{S_1}{8} \cosh \frac{S_1 x}{2} - \frac{b}{8} \sinh \frac{S_1 x}{2} \right) \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{b S_1^2}{2} \sinh \frac{S_1 x}{2} + \frac{b^2 S_1}{4} \cosh \frac{S_1 x}{2} \right] \right. \\ \left. + C_3 \left[\frac{b S_2^2}{4} \cos \frac{S_2 x}{2} - \frac{b^2 S_2}{4} \sin \frac{S_2 x}{2} \right. \right. \\ \left. \left. - (b^2 - S_2^2) \left(\frac{S_2}{8} \sin \frac{S_2 x}{2} + \frac{b}{8} \cos \frac{S_2 x}{2} \right) \right] \right. \\ \left. + C_4 \left[\frac{b S_2^2}{4} \sin \frac{S_2 x}{2} + \frac{b^2 S_2}{4} \cos \frac{S_2 x}{2} \right. \right. \\ \left. \left. + (b^2 - S_2^2) \left(\frac{S_2}{8} \cos \frac{S_2 x}{2} - \frac{b}{8} \sin \frac{S_2 x}{2} \right) \right] \right\}. \quad (21)$$

4. Applications

We seek the frequency equation (the equation whose roots give us the frequencies of vibration of the normal modes) for beams with different end conditions. From these roots it is then possible to obtain the corresponding modal configurations.

Case 1. Simply Supported Beam

The boundary (or end) conditions are:

$$(X)_{x=0} = 0, \quad (X)_{x=L} = 0, \\ (IX'')_{x=0} = 0, \quad (IX'')_{x=L} = 0.$$

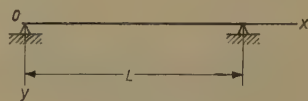


Figure 1

Simply supported beam.

From equations (18) and (20) we thus get

$$\left. \begin{aligned} C_1 + 0 + C_3 + 0 &= 0, \\ \cosh \frac{S_1 L}{2} C_1 + \sinh \frac{S_1 L}{2} C_2 + \cos \frac{S_2 L}{2} C_3 + \sin \frac{S_2 L}{2} C_4 &= 0, \\ \frac{(S_1^2 + b^2)}{2} C_1 - b S_1 C_2 + \frac{(b^2 - S_2^2)}{2} C_3 - b S_2 C_4 &= 0, \\ f(L) C_1 + g(L) C_2 + h(L) C_3 + j(L) C_4 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

If all the $C'_s \neq 0$ (i. e., the deflections $\neq 0$) then the determinant of the coefficients of the C'_s in the above homogeneous set of equations must vanish. Expanding this determinant, we obtain

$$(8K^2 - b^4) \sin \frac{S_2 L}{2} \sinh \frac{S_1 L}{2} + b^2 S_1 S_2 \left(\cos \frac{S_2 L}{2} \cosh \frac{S_1 L}{2} - 1 \right) = 0 \quad (23)$$

wherein, as before: $S_1^2 = 4K + b^2$ and $S_2^2 = 4K - b^2$. The unknown in the frequency equation (23) is K . The value of the circular frequency p follows then from equation (16).

Equations (22) also give us the ratios

$$\left. \begin{aligned} \frac{C_3}{C_1} &= -1, \\ \frac{C_2}{C_1} &= \frac{b S_2 \left(\cosh \frac{S_1 L}{2} - \cos \frac{S_2 L}{2} \right) + 4K \sin \frac{S_2 L}{2}}{b \left(S_1 \sin \frac{S_2 L}{2} - S_2 \sinh \frac{S_1 L}{2} \right)}, \\ \frac{C_4}{C_1} &= \frac{b S_1 \left(\cos \frac{S_2 L}{2} - \cosh \frac{S_1 L}{2} \right) - 4K \sinh \frac{S_1 L}{2}}{b \left(S_1 \sin \frac{S_2 L}{2} - S_2 \sinh \frac{S_1 L}{2} \right)}. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Equation (23) is satisfied by an infinite number of values of K , i. e., an infinite number of p . Call these values p_j and the associated quantities K_j , S_{j1} , S_{j2} , A_j , B_j , C_{j1} , C_{j2} , C_{j3} and C_{j4} . The general solution of equation (1) becomes

$$\left. \begin{aligned} y &= \sum_{j=1}^{\infty} C_{j1} e^{-b x/2} (A_j \cos p_j t + B_j \sin p_j t) \\ &\times \left(\cosh \frac{S_{j1} x}{2} + \frac{C_{j2}}{C_{j1}} \sinh \frac{S_{j1} x}{2} + \frac{C_{j3}}{C_{j1}} \cos \frac{S_{j2} x}{2} + \frac{C_{j4}}{C_{j1}} \sin \frac{S_{j2} x}{2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

The constants A_j and B_j are obtained from the initial conditions as given by equations (12), and may absorb the remaining C constant.

Limiting Case: If $b = c = 0$ then from equations (13) we have $A = A_0$ and $I = I_0$, i. e., the simply supported beam with constant cross section. Equation (23) reduces to:

$$\sin \frac{S_2 L}{2} = 0 \quad \text{or} \quad \sin \sqrt{K} L = 0,$$

the consecutive roots of this equation are

$$\frac{S_{j2} L}{2} = j \pi \quad (j = 1, 2, 3, \dots).$$

Equations (22) give us:

$C_1 = 0, \quad C_3 = 0, \quad \frac{C_2}{C_4} = -\frac{\sin(S_2 L/2)}{\sinh(S_1 L/2)} = 0, \quad \therefore C_2 = 0 \quad \text{and} \quad C_4 \neq 0,$

and equation (25) becomes:

$$y = \sum_{j=1}^{\infty} (A_j \cos p_j t + B_j \sin p_j t) \sin \frac{j \pi x}{L};$$

these results agree with the well-known solution [13].

We proceed next to solve the frequency equation (23) for

$c = 1 \quad \therefore A = A_0 e^{x/L} \quad \text{and} \quad I = I_0 e^{x/L} \quad \text{and} \quad b = \frac{1}{L}.$

Let

$k = K L^2 \tag{26}$

and from equations (17)

$S_1 = \sqrt{4 K + b^2} = \frac{1}{L} \sqrt{4 k + 1}, \quad S_2 = \sqrt{4 K - b^2} = \frac{1}{L} \sqrt{4 k - 1}.$

Equation (23) becomes

$$\left. \begin{aligned} (8 k^2 - 1) \sin \sqrt{k - \frac{1}{4}} \sinh \sqrt{k + \frac{1}{4}} \\ + \sqrt{16 k^2 - 1} \left(\cos \sqrt{k - \frac{1}{4}} \cosh \sqrt{k + \frac{1}{4}} - 1 \right) = 0. \end{aligned} \right\} \tag{27}$$

Denote the left side of this equation by $f(k)$. Both parts of $f(k)$ are positive, thus k is chosen so that $\sin \sqrt{k - (1/4)}$ and $\cos \sqrt{k - (1/4)}$ have opposite signs. Trials show that $k \cong 10$, so that

$8 k^2 - 1 \cong 8 k^2 \quad \text{and} \quad \sqrt{16 k^2 - 1} \cong 4 k, \quad \cosh \sqrt{k + \frac{1}{4}} \gg 1, \quad \text{etc.}$

Equation (27) may be approximated by

$k \tan \sqrt{k - \frac{1}{4}} \tanh \sqrt{k + \frac{1}{4}} \cong -\frac{1}{2} \tag{27a}$

and the graphical solution is indicated in Figure 2.

The intersection points (1, 2, 3, ...) give us the approximate values of $\sqrt{k - (1/4)}$, i. e., the k values.

For $k = 9.77$, equation (27) gives $f(k) = +8.5$.

For $k = 9.79$, equation (27) gives $f(k) = -13$. We accept as the first root:

$k_1 = 9.78 = (3.12)^2.$

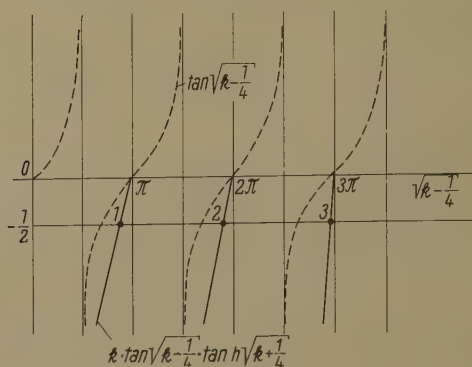


Figure 2

Graphical solution of frequency equation.

The second root is in the neighborhood of 2π in Figure 2, i. e.,

$$6.28 \cong \sqrt{k - \frac{1}{4}}.$$

For $k = 39.4$, equation (27) gives $f(k) = -1.68$.

For $k = 39.6$, equation (27) gives $f(k) = -0.1$. We accept as the second root:

$$k_2 = 39.6 = (6.29)^2.$$

From equations (16) and (26):

$$K_i^2 = \frac{p_i^2 \gamma A_0}{E g I_0} = \frac{k_i^2}{L^4} \quad \text{or} \quad p_i = \frac{k_i}{L^2} \sqrt{\frac{E g I_0}{\gamma A_0}}.$$

Thus the first two circular frequencies are:

$$p_1 = \frac{(3.12)^2}{L^2} \sqrt{\frac{E g I_0}{\gamma A_0}}, \quad p_2 = \frac{(6.29)^2}{L^2} \sqrt{\frac{E g I_0}{\gamma A_0}}; \quad (28)$$

it may be seen that $6.29 - 3.12 = 3.17 \cong \pi$ and Figure 2 shows that the roots are spaced at intervals of approximately π^2 for the higher modes.

For the first mode ($c = 1$, $b = 1/L$, $k_1 = 9.78$, etc.) equations (24) reduce to:

$$\frac{C_2}{C_1} = -1.115, \quad \frac{C_3}{C_1} = -1, \quad \frac{C_4}{C_1} = 7.43$$

and equation (25) gives us the first modal configuration

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= e^{-\pi/2L} \\ &\times \left(\cosh 3.17 \frac{x}{L} - 1.115 \sinh 3.17 \frac{x}{L} - \cos 3.09 \frac{x}{L} + 7.43 \sin 3.09 \frac{x}{L} \right); \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

this is plotted in Figure 3.

For the second mode ($c = 1$, $b = 1/L$, $k_2 = 39.6$, etc.) equations (24) reduce to:

$$\frac{C_2}{C_1} = -1, \quad \frac{C_3}{C_1} = -1, \quad \frac{C_4}{C_1} = 13.6$$

and equation (25) gives us the second modal configuration

$$X_2 = e^{-x/2L} \left(\cosh \frac{6.3x}{L} - \sinh \frac{6.3x}{L} - \cos \frac{6.3x}{L} + 13.6 \sin \frac{6.3x}{L} \right); \quad (30)$$

this is also plotted in Figure 3.

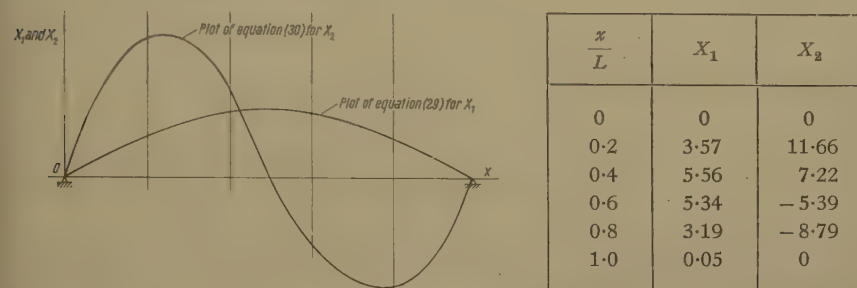


Figure 3
Modal configurations for Case 1.

Case 2. Beam With Both Ends Fixed

The boundary conditions are:

$$(X)_{x=0} = 0, \quad (X)_{x=L} = 0,$$

$$(X')_{x=0} = 0, \quad (X')_{x=L} = 0.$$

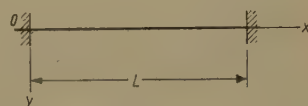


Figure 4
Fixed end beam.

From equations (18) and (19) we obtain

$$\left. \begin{aligned} C_1 + 0 + C_3 + 0 &= 0, \\ \cosh \frac{S_1 L}{2} C_1 + \sinh \frac{S_1 L}{2} C_2 + \cos \frac{S_2 L}{2} C_3 + \sin \frac{S_2 L}{2} C_4 &= 0, \\ -b C_1 + S_1 C_2 - b C_3 + S_2 C_4 &= 0, \\ \left(S_1 \sinh \frac{S_1 L}{2} - b \cosh \frac{S_1 L}{2} \right) C_1 + \left(S_1 \cosh \frac{S_1 L}{2} - b \sinh \frac{S_1 L}{2} \right) C_2 \\ + \left(-S_2 \sin \frac{S_2 L}{2} - b \cos \frac{S_2 L}{2} \right) C_3 + \left(S_2 \cos \frac{S_2 L}{2} - b \sin \frac{S_2 L}{2} \right) C_4 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Expanding the determinant of the coefficients of the C 's (compare Case 1), we obtain the frequency equation

$$b^2 \sin \frac{S_2 L}{2} \cdot \sinh \frac{S_1 L}{2} + S_1 S_2 \left(1 - \cos \frac{S_2 L}{2} \cdot \cosh \frac{S_1 L}{2} \right) = 0. \quad (32)$$

Equations (31) also give us the ratios

$$\left. \begin{aligned} \frac{C_2}{C_1} &= \frac{\cos \frac{S_2 L}{2} - \cosh \frac{S_1 L}{2}}{\sinh \frac{S_1 L}{2} - \frac{S_1}{S_2} \sin \frac{S_2 L}{2}}, \\ \frac{C_3}{C_1} &= -1, \\ \frac{C_4}{C_1} &= \frac{S_1 \left(\cosh \frac{S_1 L}{2} - \cos \frac{S_2 L}{2} \right)}{S_2 \sinh \frac{S_1 L}{2} - S_1 \sin \frac{S_2 L}{2}}. \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

The complete solution of Case 2 is equation (25) with the p_j from equation (32) and the C -ratios from equations (33).

Limiting Case: If $b = c = 0$, equations (13) reduce to $A = A_0$ and $I = I_0$, i. e., the fixed-ended beam of constant cross section. Equation (32) becomes

$$\cos \sqrt{K} L \cosh \sqrt{K} L = 1$$

as it should be [13].

As in Case 1, we proceed to solve the frequency equation for

$$c = 1 \quad \therefore A = A_0 e^{x/L} \quad \text{and} \quad I = I_0 e^{x/L} \quad \text{and} \quad b = \frac{1}{L}$$

and, as before

$$k = K L^2 \quad \therefore S_1 = \sqrt{4K + b^2} = \frac{1}{L} \sqrt{4k + 1}, \quad S_2 = \sqrt{4K - b^2} = \frac{1}{L} \sqrt{4k - 1}.$$

Equation (32) becomes

$$\sin \sqrt{k - \frac{1}{4}} \sinh \sqrt{k + \frac{1}{4}} + \sqrt{16k^2 - 1} \left(1 - \cos \sqrt{k - \frac{1}{4}} \cosh \sqrt{k + \frac{1}{4}} \right) = 0. \quad (34)$$

The first two roots are

$$k_1 = 22.4 = (4.73)^2, \quad k_2 = 61.8 = (7.85)^2.$$

And the first two circular frequencies are

$$p_1 = \frac{(4.73)^2}{L^2} \sqrt{\frac{E g I_0}{\gamma A_0}}, \quad p_2 = \frac{(7.85)^2}{L^2} \sqrt{\frac{E g I_0}{\gamma A_0}}. \tag{35}$$

Note that $7.85 - 4.73 = 3.12 \cong \pi$, i. e., the adjoining k 's differ by about π^2 [as is evident in equation (34)].

For the first mode ($c = 1$, $b = 1/L$, $k_1 = 22.4$, etc.) equations (33) give

$$\frac{C_2}{C_1} = -0.984, \quad \frac{C_3}{C_1} = -1, \quad \frac{C_4}{C_1} = +0.992$$

and from equation (25)

$$X_1 = e^{-x/2L} \left(\cosh 4.75 \frac{x}{L} - 0.98 \sinh 4.75 \frac{x}{L} - \cos 4.71 \frac{x}{L} + 0.99 \sin 4.71 \frac{x}{L} \right) \tag{36}$$

this is plotted in Figure 5.

For the second mode ($c = 1$, $b = 1/L$, $k_2 = 61.8$, etc.) equations (33) give

$$\frac{C_2}{C_1} = -1.01, \quad \frac{C_3}{C_1} = -1, \quad \frac{C_4}{C_1} = +1.02$$

and from equation (25)

$$X_2 = e^{-x/2L} \left(\cosh 7.88 \frac{x}{L} - 1.01 \sinh 7.88 \frac{x}{L} - \cos 7.84 \frac{x}{L} + 1.02 \sin 7.84 \frac{x}{L} \right) \tag{37}$$

this is also plotted in Figure 5.

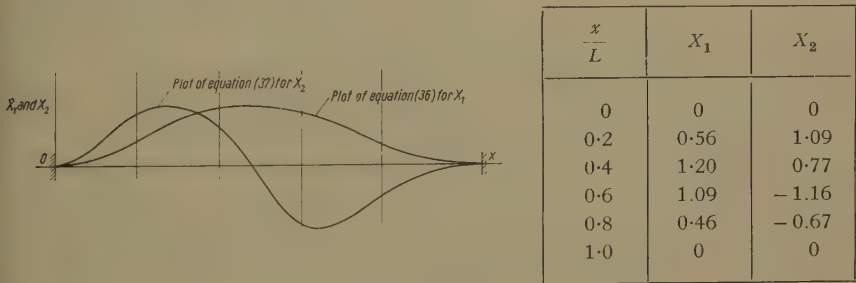


Figure 5
Modal configurations for Case 2.

Case 3. Beam Simply Supported at One End and Fixed at the Other End

The boundary conditions are:

$$(X)_{x=0} = 0, \quad (X)_{x=L} = 0, \quad (IX'')_{x=0} = 0, \quad (X')_{x=L} = 0.$$

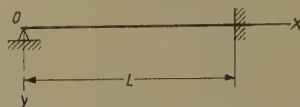


Figure 6

Beam with one end simply supported, other end fixed.

From equations (18), (19) and (20) we obtain

$$\left. \begin{aligned} C_1 + 0 + C_3 + 0 &= 0, \\ \cosh \frac{S_1 L}{2} \cdot C_1 + \sinh \frac{S_1 L}{2} \cdot C_2 + \cos \frac{S_2 L}{2} \cdot C_3 + \sin \frac{S_2 L}{2} \cdot C_4 &= 0, \\ \frac{(S_1^2 + b^2)}{2} \cdot C_1 - b S_1 C_2 + \frac{(b^2 - S_2^2)}{2} \cdot C_3 - b S_2 C_4 &= 0, \\ \left(S_1 \sinh \frac{S_1 L}{2} - b \cosh \frac{S_1 L}{2} \right) C_1 + \left(S_1 \cosh \frac{S_1 L}{2} - b \sinh \frac{S_1 L}{2} \right) C_2 \\ - \left(S_2 \sin \frac{S_2 L}{2} + b \cos \frac{S_2 L}{2} \right) C_3 + \left(S_2 \cos \frac{S_2 L}{2} - b \sin \frac{S_2 L}{2} \right) C_4 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

Expanding the determinant of the coefficients of the C 's (as in Cases 1 and 2), we obtain the frequency equation

$$\left. \begin{aligned} b S_1 S_2 \left(1 - \cos \frac{S_2 L}{2} \cosh \frac{S_1 L}{2} \right) + b^3 \sin \frac{S_2 L}{2} \sinh \frac{S_1 L}{2} \\ + 2 K \left(S_1 \sin \frac{S_2 L}{2} \cosh \frac{S_1 L}{2} - S_2 \cos \frac{S_2 L}{2} \sinh \frac{S_1 L}{2} \right) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

Limiting Case: If $b = c = 0$, the beam is prismatical and equation (39) becomes

$$\tan \sqrt{K} L = \tanh \sqrt{K} L$$

as it should be [13].

As in Cases 1 and 2, we proceed to solve the frequency equation for $c = 1$. Equation (39) becomes

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{16 k^2 - 1} \left(1 - \cos \sqrt{k - \frac{1}{4}} \cosh \sqrt{k + \frac{1}{4}} \right) + \sin \sqrt{k - \frac{1}{4}} \sinh \sqrt{k + \frac{1}{4}} \\ + 2 k \left(\sqrt{4 k + 1} \sin \sqrt{k - \frac{1}{4}} \cosh \sqrt{k + \frac{1}{4}} \right. \\ \left. - \sqrt{4 k - 1} \cos \sqrt{k - \frac{1}{4}} \sinh \sqrt{k + \frac{1}{4}} \right) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

The first two roots are

$$k_1 = 16.55 = (4.07)^2, \quad k_2 = 51.0 = (7.15)^2.$$

And the first two circular frequencies are

$$p_1 = \frac{(4.07)^2}{L^2} \sqrt{\frac{E g I_0}{\gamma A_0}}, \quad p_2 = \frac{(7.15)^2}{L^2} \sqrt{\frac{E g I_0}{\gamma A_0}}.$$

Case 4. Cantilever Beam

The boundary conditions are:

$$(IX'')_{x=0} = 0, \quad \frac{d}{dx}(IX'')_{x=0} = 0, \quad (X)_{x=L} = 0, \quad (X')_{x=L} = 0.$$



Figure 7
Cantilever beam.

From equations (18), (19), (20), and (21) we obtain

$$\left. \begin{aligned} & \frac{(S_1^2 + b^2)}{2} C_1 - b S_1 C_2 + \frac{(b^2 - S_2^2)}{2} C_3 - b S_2 C_4 = 0, \\ & -b(3S_1^2 + b^2) C_1 + S_1(3b^2 + S_1^2) C_2 \\ & \quad + b(3S_2^2 - b^2) C_3 + S_2(3b^2 - S_2^2) C_4 = 0, \\ & \cosh \frac{S_1 L}{2} C_1 + \sinh \frac{S_1 L}{2} C_2 + \cos \frac{S_2 L}{2} C_3 + \sin \frac{S_2 L}{2} C_4 = 0, \\ & \left(S_1 \sinh \frac{S_1 L}{2} - b \cosh \frac{S_1 L}{2} \right) C_1 + \left(S_1 \cosh \frac{S_1 L}{2} - b \sinh \frac{S_1 L}{2} \right) C_2 \\ & - \left(S_2 \sin \frac{S_2 L}{2} + b \cos \frac{S_2 L}{2} \right) C_3 + \left(S_2 \cos \frac{S_2 L}{2} - b \sin \frac{S_2 L}{2} \right) C_4 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

Expanding the determinant of the coefficients of the C 's (as in Cases 1, 2, and 3), we obtain the frequency equation

$$\left. \begin{aligned} & S_1 S_2 \left(1 + \cos \frac{S_2 L}{2} \cosh \frac{S_1 L}{2} \right) + 3b^2 \sin \frac{S_2 L}{2} \sinh \frac{S_1 L}{2} \\ & + 2b \left(S_1 \sin \frac{S_2 L}{2} \cosh \frac{S_1 L}{2} + S_2 \cos \frac{S_2 L}{2} \sinh \frac{S_1 L}{2} \right) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

Limiting Case: If $b = c = 0$, the beam is prismatical and equation (42) becomes

$$\cos \sqrt{K} L \cosh \sqrt{K} L = -1$$

as it should be [13].

As in Cases 1, 2, and 3, we proceed to solve the frequency equation for $c = 1$. Equation (42) becomes

$$\left. \begin{aligned} & \sqrt{16k^2 - 1} \left(1 + \cos \sqrt{k - \frac{1}{4}} \cosh \sqrt{k + \frac{1}{4}} \right) \\ & \quad + 3 \sin \sqrt{k - \frac{1}{4}} \sinh \sqrt{k + \frac{1}{4}} \\ & + 2 \left(\sqrt{4k + 1} \sin \sqrt{k - \frac{1}{4}} \cosh \sqrt{k + \frac{1}{4}} \right. \\ & \quad \left. + \sqrt{4k - 1} \cos \sqrt{k - \frac{1}{4}} \sinh \sqrt{k + \frac{1}{4}} \right) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

The first two roots are

$$k_1 = 4.5 - (2.12)^2, \quad k_2 = 24.7 - (4.97)^2.$$

And the first two circular frequencies are

$$p_1 = \frac{(2.12)^2}{L^2} \sqrt{\frac{EgI_0}{\gamma A_0}}, \quad p_2 = \frac{(4.97)^2}{L^2} \sqrt{\frac{EgI_0}{\gamma A_0}}.$$

5. Actual Sections of Surfaces of Revolution

We consider now the actual shapes of beams that satisfy the assumed conditions

$$A(x) = A_0 e^{cx/L}, \quad I(x) = I_0 e^{cx/L}.$$

$$\therefore \frac{I}{A} = \frac{I_0}{A_0} = k_0^2 = \text{const}$$

(the square of the radius of gyration of the cross section of the beam).

In general, the beams will be hollow, and appear as shown in Figure 8.

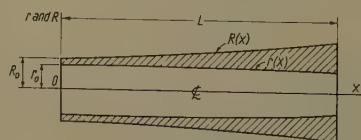


Figure 8

Beams with constant I/A .

For hollow circular cross sections, we have

$$A(x) = A_0 e^{cx/L} = \pi (R^2 - r^2), \quad I(x) = I_0 e^{cx/L} = \frac{\pi}{4} (R^4 - r^4) = \frac{A}{4} (R^2 + r^2)$$

$$\therefore \frac{I}{A} = \frac{I_0}{A_0} = k_0^2 = \frac{R^2 + r^2}{4} = \frac{R_0^2 + r_0^2}{4}.$$

Since

$$R^2 - r^2 = \frac{A_0 e^{cx/L}}{\pi} \quad \text{and} \quad R^2 + r^2 = \frac{4 I_0}{A_0}.$$

We obtain

$$R^2 = \frac{2 I_0}{A_0} + \frac{A_0 e^{cx/L}}{2 \pi} \quad \text{and} \quad r^2 = \frac{2 I_0}{A_0} - \frac{A_0 e^{cx/L}}{2 \pi}. \quad (44)$$

But for $r \geq 0$

$$\frac{cx}{L} \leq \log \frac{4 \pi I_0}{A_0^2}$$

and $x/L \leq 1$

$$\therefore c \leq \log \frac{4 \pi I_0}{A_0^2} \quad \text{or} \quad c \leq \log \frac{(R_0^2 + r_0^2)}{(R_0^2 - r_0^2)}. \quad (45)$$

Equations (44) may be written as

$$2 R^2 = (R_0^2 + r_0^2) + (R_0^2 - r_0^2) e^{cx/L} \quad \text{and} \quad 2 r^2 = (R_0^2 + r_0^2) - (R_0^2 - r_0^2) e^{cx/L}. \quad (46)$$

We may assign any values to R_0 and r_0 , provided we satisfy equation (45). Let:

$$j = \frac{R_0}{r_0} = \text{const.}$$

Equations (46) become

$$2 \left(\frac{R}{r_0} \right)^2 = (j^2 + 1) + (j^2 - 1) e^{cx/L} \quad \text{and} \quad 2 \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 = (j^2 + 1) - (j^2 - 1) e^{cx/L}. \quad (47)$$

Equation (45) gives

$$c \leq \log \frac{(j^2 + 1)}{(j^2 - 1)}.$$

Or if we assign a value to c (say $c = 1$) then

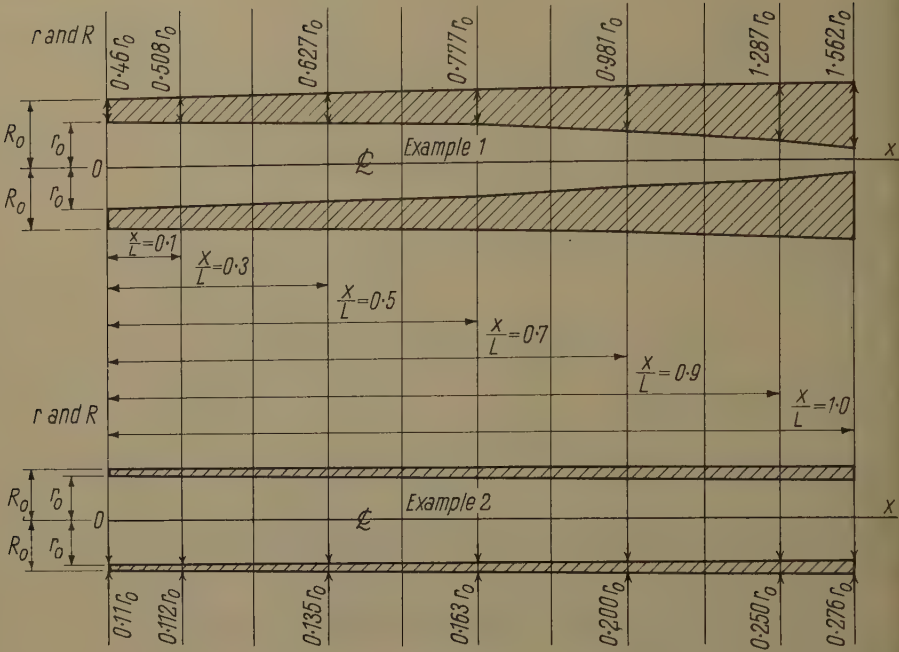
$$e^c \leq \frac{(j^2 + 1)}{(j^2 - 1)} \quad \text{or} \quad 1 < j^2 \leq \frac{(e^c + 1)}{(e^c - 1)}. \quad (48)$$

Example 1

For $c = 1$, equation (48) gives $j \leq 2.16$. Choose $j = R_0/r_0 = 1.46$. Equations (47) give

$$\left(\frac{R}{r_0} \right)^2 = 1.56 + 0.56 e^{x/L} \quad \text{and} \quad \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 = 1.56 - 0.56 e^{x/L}.$$

Numerical values are given in Table I and the plot in Figure 9.





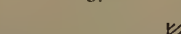

$c = 1, \quad A = A_0 e^{x/L}, \quad I = I_0 e^{x/L}, \quad j = 1.46, 1.10, \dots$					
Cases	k_1	k_2	...	p_i rad/s	f_i c/s
1. 	9.78 = (3.12) ²	39.6 = (6.29) ² ...		$p_i = \frac{k_i}{L^2} \sqrt{\frac{E g I_0}{\gamma A_0}}$	$f_i = \frac{p_i}{2 \pi}$
2. 	22.4 = (4.73) ²	61.8 = (7.85) ² ...			
3. 	16.55 = (4.07) ²	51.0 = (7.15) ² ...			
4. 	4.5 = (2.12) ²	24.7 = (4.97) ² ...			

Figure 9
Summary and plot of Examples 1 and 2.

Table 1

$\frac{x}{L}$	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9	1.0
$\frac{R}{r_0}$	1.479	1.524	1.576	1.641	1.714	1.759
$\frac{r}{r_0}$	0.971	0.897	0.799	0.660	0.427	0.197
$\frac{R-r}{r_0}$	0.508	0.627	0.777	0.981	1.287	1.562

Example 2

Again $c = 1$ and we choose $j = R_0/r_0 = 1.10$. Equations (47) give

$$\left(\frac{R}{r_0}\right)^2 = 1.105 + 0.105 e^{x/L} \quad \text{and} \quad \left(\frac{r}{r_0}\right)^2 = 1.105 - 0.105 e^{x/L}.$$

Numerical values are given in Table 2 and the plot in Figure 9.

Table 2

$\frac{x}{L}$	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9	1.0
$\frac{R}{r_0}$	1.106	1.118	1.130	1.146	1.170	1.181
$\frac{r}{r_0}$	0.994	0.983	0.967	0.946	0.920	0.905
$\frac{R-r}{r_0}$	0.112	0.135	0.163	0.200	0.250	0.276

REFERENCES

- [1] G. KIRCHHOFF, *Über die Transversalschwingungen eines Stabes von veränderlichem Querschnitt*. Mber. Akad. Wiss., Berlin 2, Okt. (1879).
- [2] MAYER Z. CAPELLEN, *Wied. Ann.* 33, 661 (1888).
- [3] J. MORROW, *On the Lateral Vibrations of Bars of Uniform and Varying Sectional Area*, *Phil. Mag.* 10, 113 (1905).
- [4] J. W. NICHOLSON, *The Lateral Vibration of Bars of Variable Sections*, *Proc. Roy. Soc., London [A]* 93, 506 (1917).
- [5] N. MONONOBÉ, *Z. angew. Math. Mech.*, 1 444 (1921).
- [6] D. M. WRINCH, *On the Vibrations of Bars of Variable Cross Sections*, *Phil. Mag.* 1923, Aug., 273; and *Proc. Roy. Soc., London [A]* 101, 493-508 (1922).
- [7] AKIMASA ONO, *J. Soc. mech. Engrs. Japan* 27, 467 (1924); and 28, 429 (1925).

- [8] W. HORT, *Berechnung der Eigentöne nicht gleichförmiger, insbesondere vergüteter Stäbe*, Z. tech. Phys. 7, 181 (1925).
- [9] E. SCHWERIN, *Über Transversalschwingungen von Stäben veränderlichen Querschnittes*, Z. tech. Phys. 8, 264 (1927).
- [10] G. TEMPLE, *The Computation of Characteristic Numbers and Characteristic Functions*, Proc. London Math. Soc. 29 (2), 257 (1929).
- [11] G. TEMPLE and W. BICKLEY, *Rayleigh's Principle and Its Applications to Engineering* (Oxford University Press, 1933).
- [12] W. T. WHITE, *On Integral Equations Approach to Problems of Vibrating Beams*, Parts I and II, J. Franklin Inst. 245, Jan., 25–36 (1948); and Feb., 117–133 (1948).
- [13] S. TIMOSHENKO, *Vibration Problems in Engineering*, 3rd edition (D. Van Nostrand Co., New York 1955).
- [14] N. TALEB, *Free Lateral Vibrations of Beams With Non-Uniform Cross Sections*, Ph. D. Dissertation (Princeton University 1955).

Zusammenfassung

Es werden die freien Querschwingungen von Balken mit exponentiell veränderlichen Querschnitten und Trägheitsmomenten für verschiedene Randbedingungen untersucht. Die Frequenzgleichungen, Eigenfrequenzen und Schwingungsformen werden angegeben (wobei die Auswertung einfachheitshalber auf die beiden ersten Eigenschwingungen beschränkt bleibt).

(Received: April 15, 1956.)

Kurze Mitteilungen – Brief Reports – Communications brèves

Ein kompaktes Dekadenzählgerät mit bedarfsweiser Umschaltung der Zählkanäle, Untersetzerstufen und Zählwerke

Von WERNER BEUSCH und DANIEL MAEDER, Zürich¹⁾

I. Anforderungen an Mehrfachzählgeräte

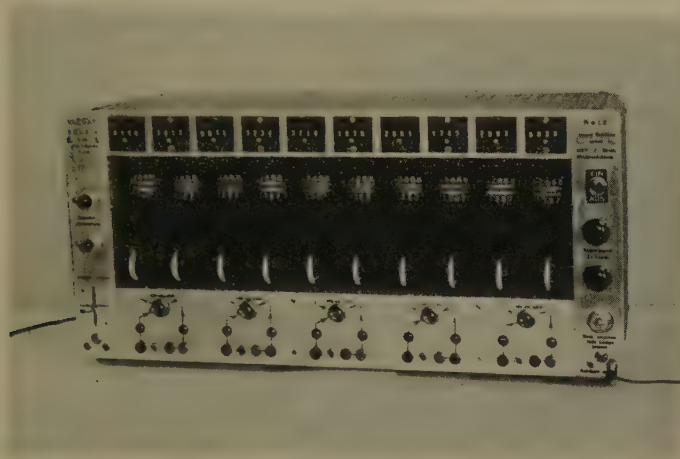
In der Kernphysik stellt sich immer wieder das Problem, elektrische Impulse aus Messapparaten separat, aber gleichzeitig zu zählen: etwa die Gesamtzahl der in einem oder mehreren Strahlungsdetektoren erzeugten Impulse und gleichzeitig dazu verschiedene Zahlen von Impulsen, die nach gewissen Kriterien (Grösse, Gleichzeitigkeit mit anderen Ereignissen usw.) ausgewählt sind. Anlagen, die bis zu 20 verschiedene Zählungen simultan durchführen, werden sehr häufig gebraucht²⁾. Bei Apparaturen dieser Grössenordnung erfordert die Summierung mittels elektromechanischer Zählwerke weniger Aufwand als eine rein elektro-

¹⁾ Physikalisches Institut der ETH.

²⁾ E. BALDINGER und W. HAEERLI, *Impulsverstärker und Impulsspektrographen*. *Ergebn. exakt. Naturw.* 27, 248 (1953); A. B. VAN RENNES, *Pulse-Amplitude Analysis in Nuclear Research*, *Nucleonics* 10, Nr. 7, 20; Nr. 8, 22 (1952).

nische Zählung³⁾. Die mechanischen Zählwerke erlauben eine rasche Ablesung, insbesondere, wenn auf die Interpolation der Untersetzer verzichtet werden kann. Dies erfordert allerdings, dass man das Untersetzungsverhältnis in jedem Kanal der jeweils vorhandenen Stosshäufigkeit anpasst, wobei im allgemeinen nur ein Bruchteil der eingebauten Untersetzerstufen ausgenützt wird.

Weiter ist es oft wünschbar, zum Beispiel bei Messungen an radioaktiven Substanzen kurzer Halbwertszeit, ohne Unterbruch zu zählen, aber mit Able-sungen in kurzen Zeitabständen.



Figur 1

Frontansicht des umschaltbaren 5-bis-10-Kanal-Zählgeräts mit eingebautem Netzteil.

Um eine gegebene Zahl von Untersetzern möglichst vollständig auszunützen und um die ganze Anlage klein und handlich zu halten, haben wir dem Bau des in Figur 1 abgebildeten Mehrfachzählgeräts folgende Bedingungen zugrunde gelegt⁴⁾:

1. Verwendung von 10 dekadischen Untersetzereinheiten⁵⁾.
2. Jede Dekadenstufe kann wahlweise entweder
 - a) einzeln betrieben, das heisst direkt mit einer Endstufe mit Zählwerk verbunden werden, oder
 - b) mit einer benachbarten Stufe zu einem hundertfachen Untersetzer kombiniert werden.

Die für diese Umschaltungen benützten 5 Kippschalter sind in Figur 1 unterhalb der Dekadeneinheiten sichtbar.

3. Jeder der 10 Eingänge führt zunächst auf einen relativ hochauflösenden Zweifachuntersetzer, um die Zählverluste in den nachfolgenden Dekadenstufen

³⁾ Etwa nach Art des von HUTCHINSON und SCARROTT beschriebenen Systems, welches bei grosser Anzahl von Kanälen aufwandmässig günstiger wird. Siehe Phil. Mag. 42, II, 792 (1951).

⁴⁾ Vorläufige Mitteilung: W. BEUSCH und D. MAEDER, *Ein einfaches Dekaden-Zählgerät mit umschaltbaren Kanal- und Untersetzungszahlen*. Helv. Phys. Acta 29, Fasz. 3, 263 (1956).

⁵⁾ Der Firma Philips-Electronica danken wir für die anlässlich des ETH-Jubiläums erfolgte Schenkung von betriebsfertigen Steckeinheiten des Typs 88929/02 mit E11-Dekadenröhren.

klein zu halten. In Figur 1 sind oberhalb der Eingangs- und Erdungsbuchsen die zu den Zweifachuntersetzern gehörigen Interpolationslämpchen erkennbar. Sie dienen nur der Funktionskontrolle. Für die nach 2b) zusammengefassten Dekadenpaare ist jeweils nur der geradzahlige (rechts befindliche) Eingang wirksam.

4. Zur Ermöglichung ununterbrochener Messungen in fünf Kanälen werden die 10 Untersetzer und Zählwerke in zwei Gruppen (I und II) unterteilt. Ein gemeinsamer Schalter (in Figur 1 links aussen) erlaubt

- a) alle Kanäle dauernd (siehe Figur 2: Stellung «I + II»),
- b) abwechselungsweise die eine oder andere Gruppe in Betrieb zu setzen, so dass immer eine Gruppe zwecks Ablesung und Nullstellung stillgelegt ist.

Soweit dabei die Dekadeneinheiten einzeln betrieben werden (20fache Untersetzung), so wird jeweils der ganze Zählkanal stillgelegt, so dass auch die Dekaden abgelesen und auf 0 gestellt werden können. Sind zwei Dekadeneinheiten zu einem 200fachen Untersetzer zusammengefasst, so wird nur von den zugehörigen Zählwerken eines stillgelegt. Wegen der fehlenden Interpolationsmöglichkeit ist diese Betriebsart auf hohe Impulsfrequenzen beschränkt.

Entsprechend der alternierenden Betriebsmöglichkeit sind zwei Rückstaltasten vorhanden (siehe Figur 1, links aussen).

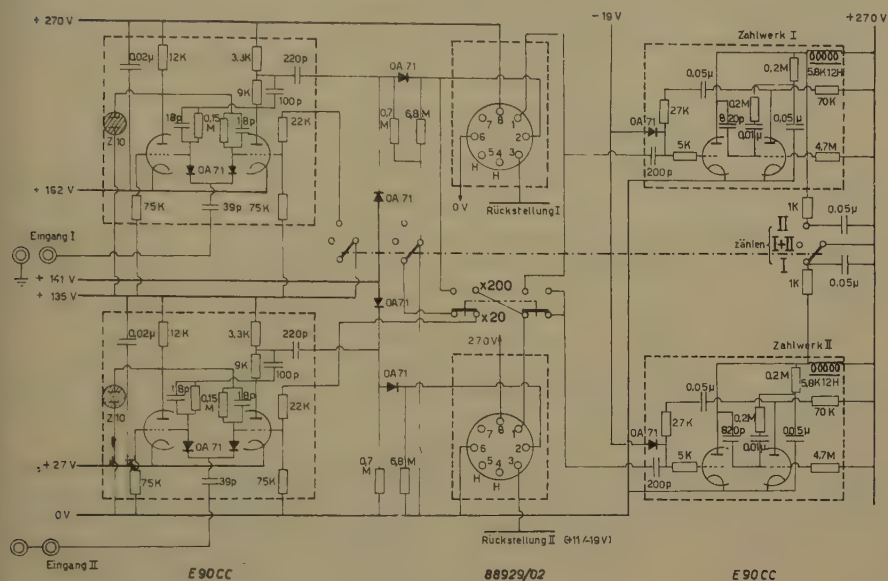
5. Die Eingänge haben auf kurze negative Impulse (Anstieg $< 0,5 \mu\text{s}$, Abfall $> 1 \mu\text{s}$) von $\geq 10 \text{ V}$ Amplitude anzusprechen, wie sie in Apparaturen mit mehreren Zählausgängen normalerweise verfügbar sind oder sich allenfalls aus Zählimpulsen anderer Form mittels eines RC-Diodengliedes leicht herstellen lassen.

6. Die Endstufen haben Zählwerke von 5800Ω und 12 Hy (Anzug 10 mA , Abfall 2 mA) bis zu 20 mal pro Sekunde zu betätigen. Der hohe Widerstandswert erlaubt, an Stelle eines Thyatron's eine normale Doppeltriode E90CC als Endröhre zu verwenden, mit dem Vorteil der unabhängigen Wahl von Stromleitungs- und Erholungsdauer.

II. Eingangsstufen und Umschaltungen

Einzelheiten der Schaltung, insbesondere die für die unter 2. und 4. besprochenen Kombinationsmöglichkeiten notwendigen Umschalter sind aus dem Schema (Figur 2) ersichtlich, das eines von den 5 identischen Paaren aus je zwei benachbarten Zählkanälen darstellt. Auf den Einbau besonderer Diskriminatorstufen kann hier gemäss 5. verzichtet werden, da die zu zählenden Impulse praktisch stets aus Apparaturen stammen, welche alle nötigen Diskriminatoren bereits enthalten, und es ist deshalb möglich, für die Zweifachuntersetzung einschliesslich der Erzeugung der für die Dekadeneinheiten erforderlichen positiven Impulse spezieller Form (Amplitude $13,5 \text{ V}$, Anstieg $> 20 \text{ V}/\mu\text{s}$, Abfall $< 2 \text{ V}/\mu\text{s}$) mit einer Doppeltriode je Kanal auszukommen. Nach Ansprechen des Zweifachuntersetzers wird die Kopplungskapazität von 220 pF über den Spannungsteiler im Anodenwiderstand der einen Hälfte der E90CC um $13,5 \text{ V}$ umgeladen. Ein negativer Ladungsschoss wird sogleich ($< 1 \mu\text{s}$) durch eine Diode 0A71 gegen die Gleichspannung von $+ 141 \text{ V}$ abgeführt; eine positive Ladung dagegen wird nur langsam (über $0,7 \text{ M}\Omega$) gegen 0 V abgeleitet, und der Entladungsvorgang wird durch die Diode erst aufgehalten, wenn das Potential wieder $+ 141 \text{ V}$ erreicht, was nach $14 \mu\text{s}$ der Fall ist. Der so gebildete $14 \mu\text{s}$ lange positive Sägezahnimpuls wird über eine zweite Diode auf den Eingang (Kontakt Nr. 2) der zugehörigen Dekadenstufe gekoppelt. Die zweite Diode hat den Zweck, die bei einem erneuten

Ansprechen des Zweifachuntersetzers während der Dauer des positiven Sägezahnimpulses entstehende steile negative Flanke von der Dekadenstufe fernzuhalten, wobei die totale Verdrahtungskapazität des Kontakts Nr. 2 (rund 25 pF) ein



Figur 2

Schaltschema von 2 benachbarten Zählkanälen.

Widerstandswerte in $k\Omega$ bzw. $M\Omega$, Kapazitätswerte in pF bzw. μF . Der Gruppenumschalter $1/(I + II)/II$ wird für alle Kanalpaare mit einer gemeinsamen Achse betätigt.

rasches Abfallen des betreffenden Potentials verhindert. Ohne diese Massnahme würde das Zurückkippen des Zweifachuntersetzers grosse zusätzliche Zählverluste der Dekadenstufe verursachen (vgl. Abschnitt III).

Die fertig erhältlichen Dekadeneinheiten (Typ 88929/02) sind in Figur 2 nur durch das Schema ihrer Steckeranschlüsse dargestellt. Zur Serieschaltung zweier Dekaden wird durch den doppelpoligen Kippschalter « $\times 20/\times 200$ » der Ausgang (Kontakt Nr. 1) der unteren Einheit direkt mit dem Eingang (Kontakt Nr. 2) der oberen Einheit verbunden. In diesem Falle dient die zweite Diode des oberen Kanals zur Isolation zwischen dem oberen Zweifachuntersetzter (der zur Gruppe I gehört) und den vereinigten Dekadenstufen, wobei vorausgesetzt werden muss, dass der Eingang I keine Impulse empfängt, solange der Gruppenwähler auf II steht. Bei der Zusammenschaltung eines Dekadenpaares muss daher der dazugehörige «Eingang I» geerdet und ständig der «Eingang II» benützt werden; die Umschaltung I/II bezieht sich in diesem Falle nur auf die Zählwerke.

Andererseits müssen bei ununterbrochen abwechselndem Betrieb der einzelnen Dekaden die beiden Eingänge I und II miteinander verbunden werden, worauf die doppelte Ausführung der Eingangsbuschse II hinweist.

III. Totzeitverluste

Folgt auf einen idealen Zweifachuntersetzer ein mit einer definierten Totzeit T behafteter «langsamer» Zähler, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass der letztere bis zum nächsten Schritt jeweils

$$1 \text{ Impuls verliert: } e^{-\lambda T} \left[\frac{(\lambda T)^2}{2!} + \frac{(\lambda T)^3}{3!} \right],$$

$$2 \text{ Impulse verliert: } e^{-\lambda T} \left[\frac{(\lambda T)^4}{4!} + \frac{(\lambda T)^5}{5!} \right]$$

usw., wobei λ = mittlere Frequenz der statistisch verteilten Eingangsimpulse am Zweifachuntersetzer.

Der gesamte relative Zählverlust unserer Dekadenstufen ($T = 27 \mu\text{s}$) beträgt also, falls die in Abschnitt II erwähnte Möglichkeit zusätzlicher Zählverluste behoben ist:

$$\delta_{10} = \frac{(\lambda T)^2}{2} e^{-\lambda T} \left[1 + \frac{\lambda T}{3} + 2 \frac{(\lambda T)^2}{3 \cdot 4} \left(1 + \frac{\lambda T}{5} \right) + \dots \right].$$

Die Totzeitverluste des wirklichen Zweifachuntersetzers ($\tau = 1,5 \mu\text{s}$) liefern einen weiteren merklichen Beitrag

$$\delta_2 \approx \lambda \tau$$

an die Gesamtverluste. Durch die maximale Zählfrequenz der Endstufen und den grösstmöglichen Untersetzungsfaktor werden die zulässigen Eingangsfrequenzen auf $\lambda \lesssim 4000/\text{s}$ begrenzt. Mit obigen Parametern berechnet man zum Beispiel

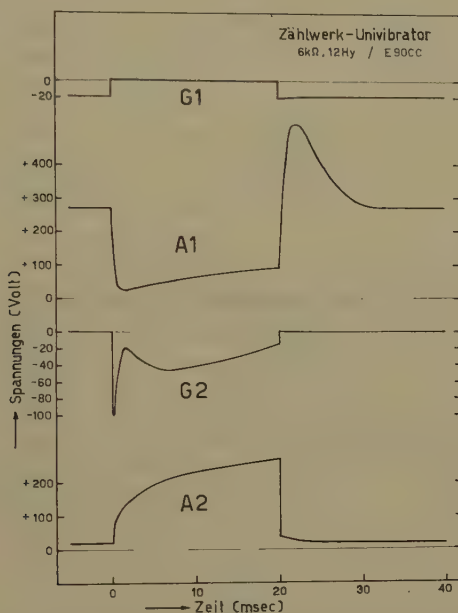
bei λ	=	1000	2000	3000	4000	5000	Eingangsimpulsen/s
$\delta_2 + \delta_{10}$	=	0,19	0,44	0,76	1,14	1,58	% Gesamtverlust

Experimentelle Bestimmungen der Totzeitverluste mit Impulsen aus einem Szintillationszähler ergaben einerseits beim Vergleich der fünf 200fach-Unter-setzerkanäle untereinander eine ausgezeichnete Übereinstimmung; andererseits lieferten Kontrollmessungen mit einem schnellen 2¹⁰fach-Unter-setzer von bekannter Totzeit eine Bestätigung der theoretischen Verluste innerhalb $\pm 0,5\%$ bis zu Eingangsfrequenzen von 4000/s. Überbrücken der Seriedioden in den geradzahli- gen Kanälen (vgl. Abschnitt II) bewirkte zusätzliche Verluste von 2 ... 3%.

IV. Endstufen

Die ebenfalls in Figur 2 dargestellte Univibratorschaltung antwortet auf die relativ kurzen ($14 \mu\text{s}$) positiven Ausgangsimpulse der Dekadeneinheiten mit je einem Impuls maximaler Stromleitung durch das Zählwerk während 20 ms Dauer. Aus den in Figur 3 nach Oszillogrammen wiedergegebenen Spannungsverläufen erkennt man, dass etwa 10 ms später die von der Selbstinduktion des Zählwerks herrührende Schwingung völlig abgeklungen ist. Der zwischen Zählwerk und $0,05\text{-}\mu\text{F}$ -Parallelkapazität liegende $1\text{-k}\Omega$ -Widerstand dient nicht nur zur Dämpfung dieser Schwingung, sondern vor allem zur Erzeugung eines nahezu senkrechten, in der Amplitude aber begrenzten Abfalls an der Anode A1 (linke Hälfte der Doppeltriode in Figur 2) zu Beginn des Ansprechens, damit das Gitter G2 schon nach $1 \mu\text{s}$ vollständig sperrt. Von den beiden mit G2 verbundenen Kondensatoren dient der kleinere (820 pF) zum Übertragen des senkrechten

Teils der negativen Flanke, während der grössere ($0,01 \mu\text{F}$) zusammen mit dem Seriewiderstand von $0,2 \text{ M}\Omega$ und einem weiteren RC-Glied dafür sorgt, dass $G2$ keine unzulässig grossen Spannungsspitzen erhält und doch möglichst lange stark negativ bleibt. Die Kippdauer von 20 ms wird im wesentlichen durch die $0,01\text{-}\mu\text{F}$ -Kapazität und den Ableitwiderstand von $4,7 \text{ M}\Omega$ bestimmt; das erwähnte zusätzliche RC-Glied ($0,05 \mu\text{F}$ und $0,2 \text{ M}\Omega$) wirkt im Sinne einer Verlängerung der Kippdauer derart, dass der Schnitt der $G2$ -Kurve mit der Sperrspannungs-Horizontalen schliesslich steiler wird.



Figur 3

Impulsformen an der Zählwerkendstufe.

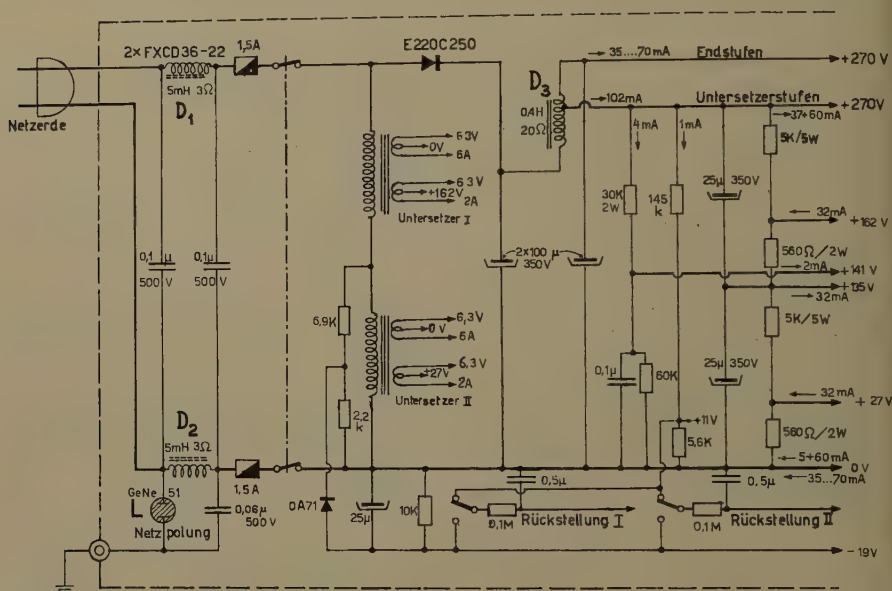
G Gitter, A Anode. 1 und 2 bedeuten im Schaltschema (Figur 2) das links bzw. rechts gezeichnete Triodensystem.

Mit fabrikneuen Zählwerken lassen diese Endstufen eine Zählgeschwindigkeit von $25/\text{s}$ zu; bei längerem Gebrauch empfiehlt es sich jedoch, unterhalb von 20 Zählschritten pro Sekunde zu arbeiten.

V. Netzteil

Für den Betrieb der Dekadeneinheiten wird eine Anodenspannung von ungefähr 300 V (je 7 mA) benötigt; die Zweifachumsetzer arbeiten aber bereits mit der Hälfte einwandfrei. Wir betreiben die letztern deshalb gruppenweise zwischen 0 V und der halben Anodenspannung, bzw. zwischen der halben und der vollen Anodenspannung (je $7,5 \text{ mA}$). Die Endstufen nehmen im Ruhezustand je $3,5 \text{ mA}$, bei maximaler Zählgeschwindigkeit etwa 7 mA auf, so dass der Stromverbrauch des gesamten Anodenspannungsteils zwischen $160 \dots 190 \text{ mA}$ schwanken kann.

Aus Gründen der Gewichtersparnis wurde der Netzteil (Figur 4) ohne Anodenspannungstransformator ausgeführt. Um allzu grosse Wechselspannungskomponenten von den Betriebsspannungen fernzuhalten, muss bei der Inbetriebsetzung auf passende Polung des Netzanschlusses geachtet werden, wozu die Signallampe L dient. Da bei direkter Verbindung zwischen einem Pol der gleichgerichteten Spannung und Netzerde und bei Vermeidung von Transformatoren nur Einweggleichrichtung möglich ist, müssen die Glättungsmittel um so reichlicher



Figur 4

Schaltschema des Netzteils mit direkter Kopplung (Vermeidung eines Anodenspannungstransformators), Polaritätsanzeiger, HF-Entstörung, Heiztransformatoren und Rückstellasten I und II.

dimensioniert werden; der in Figur 4 angegebene Kunstgriff, die Glättungsdrossel mit Abgriffen zu versehen, erlaubte jedoch eine beträchtliche Reduktion des Aufwandes. Die nach der Drossel vorhandene Brummspannung von etwa 5 V (von Spitze zu Spitze) spielt für den Betrieb der Zählwerkendstufen keine Rolle; für die Untersetzerschaltungen wird die Betriebsspannung jedoch einem Drosselabgriff (rund 15% der Gesamtwindungszahl) entnommen, welcher einen günstigen Kompromiss zwischen zusätzlicher Schwächung der 50-Hz-Komponente (unterkompensiert) und Zunahme der Oberwellen (überkompensiert) liefert. Die hochfrequente Siebung mittels zweier Ferroxcube-Spulen D_1 , D_2 hat sich als hinreichend wirksam erwiesen, um das Auslösen der Untersetzer durch die Netzstörungen völlig zu unterbinden. Wegen der beträchtlichen Wärmeentwicklung der insgesamt 40 Röhren wurde das Gehäuse aus gelochtem Blech hergestellt, so dass sich eine künstliche Ventilation erübrigt.

Das ganze Gerät beansprucht wenig Raum, wiegt 16 kg und verbraucht bei maximaler Zählfrequenz 160 W. Es wurde bisher zur Messung von Szintillations-

spektren eingesetzt und hat sich beim Verfolgen der Spektren kurzlebiger Aktivitäten als besonders nützlich erwiesen. Bei einiger Übung lassen sich damit fortlaufende Ablesungen in 5 Energiebereichen mit Abständen von 10 zu 10 s durchführen.

Summary

A versatile pulse counter arrangement for nuclear radiation measurements is described. It consists of ten binary scalars (one E90CC tube per channel, dead-time $1.5 \mu\text{s}$), ten commercial decade plug-in units (one E1T + E90CC, dead-time $27 \mu\text{s}$), and ten mechanical registers (driven by one E90CC, 20 counts/s). The binary scalars accept negative pulses ($\geq 10 \text{ V}$, rise $< 0.5 \mu\text{s}$, decay $> 1 \mu\text{s}$) and serve as fast input scaling stages; they are designed to produce output pulses of the special shape required for triggering the subsequent decade stages.

If all decade units are used singly, this equipment permits to count pulses in ten independent channels at a maximum rate of 400/s with negligible losses. On the other hand, one or several decade pairs can be made to work as scale-of-200's, so that up to 4000 pulses/s/channel can be measured with counting losses $\leq 1\%$.

In cases where only 5 independent channels are needed, a switch common to all channels eliminates the dead-time otherwise required for reading out the counting results. This is done by alternative switching between even and odd registers, and in those channels which are connected as scale-of-20's, also the corresponding decade units are stopped and can be read whilst the other group of channels is working. This feature has proved especially helpful in investigations on the scintillation spectra of short-lived radioisotopes.

The power supply has been constructed without using an anode voltage transformer, so that the whole apparatus is small and relatively light weighted.

(Eingegangen: 22. Mai 1956.)

Free Convection Past a Vertical Plate

By MORTON FINSTON, Cambridge, Mass., USA¹⁾ ²⁾

1. Recently there has been a noticeable increase in interest in free convection problems. Generally the methods used are one or another of the approximate approaches developed for classical boundary layer work. There are significant differences between the two however [1]³⁾, and it may prove helpful to have exact solutions available. One such case is well known, i. e., the flow past a uniform temperature vertical plate where the equations can be reduced to ordinary differential equations. Often, however, an essential feature is that the plate temperature is not constant. It does not seem to have been noticed before that exact solutions can be obtained for a family of plate temperature variations. This note contains the derivation of the ordinary differential equations involved.

¹⁾ Massachusetts Institute of Technology.

²⁾ This work was supported by the Naval Supersonic Laboratory, Department of Aeronautical Engineering, Massachusetts Institute of Technology, Professor JOHN R. MARKHAM, Director.

³⁾ Numbers in brackets refer to References, page 529.

2. The free-convection flow past a vertical plate is governed by the following equations and conditions:

$$u u_x + v u_y = \nu u_{yy} + g \beta (T - T_e), \quad (1)$$

$$u_x + v_y = 0, \quad (2)$$

$$u T_x + v T_y = \alpha T_{yy}, \quad (3)$$

$$\text{at } y = 0: u = v = 0, \quad T = T_s(X), \quad (4)$$

$$\text{as } y \rightarrow \infty: u \rightarrow 0, \quad T = T_e, \quad \text{a constant.} \quad (5)$$

To put these equations into dimensionless form we set

$$u = (\nu g)^{1/3} \bar{u}, \quad x = \left(\frac{\nu^2}{g}\right)^{1/3} \bar{x}, \quad y = \left(\frac{\nu^2}{g}\right)^{1/3} \bar{y}, \quad v = (\nu g)^{1/3} \bar{v}, \quad \theta = \frac{T}{T_e}. \quad (6)$$

Then

$$\bar{u} \bar{u}_x + \bar{v} \bar{u}_y = \bar{u}_{yy} + \beta T_e (\theta - 1), \quad (7)$$

$$\bar{u}_x + \bar{v}_y = 0, \quad (8)$$

and

$$\bar{u} \theta_x + \bar{v} \theta_y = \frac{1}{Pr} \theta_{yy}, \quad (9)$$

where $Pr (= \nu/\alpha)$ is the Prandtl number.

Now it is well known [3] that these equations reduce to ordinary differential equations when the surface temperature is constant. Then we set

$$\psi = c_1 x^{3/4} f(y x^{-1/4}), \quad \theta = 1 + c_2 h(y x^{-1/4}), \quad (10)$$

where $u = \psi_y$, $v = -\psi_x$. It is natural to ask if there are any other surface temperature distributions which permit exact solutions. The most obvious generalization of equations (10) is to set

$$\psi = A x^p f(y x^q), \quad \theta = 1 + B x^\omega h(y x^q). \quad (11)$$

(For convenience the bars are omitted over all quantities.) This leads to

$$A^2 x^{2p+2q-1} [(p+q) f'^2 - p f f''] = A x^{p+3q} f''' + B x^\omega h, \quad (12)$$

since $\beta T_e = 1$. Thus we must have

$$2p + 2q - 1 = p + 3q, \quad \omega = p + 3q \quad \therefore \quad p = 1 + q, \quad \omega = 1 + 4q. \quad (14)$$

Finally, with $A = 1$,

$$\frac{\omega + 1}{2} f'^2 - \frac{\omega + 3}{4} f f'' = f''' + B h, \quad (15)$$

$$\omega f' h - \frac{\omega + 3}{4} f h' = \frac{1}{Pr} h''. \quad (16)$$

When

$$\eta = y x^q = 0: \begin{cases} f = f' = 0, \\ h = 1, \end{cases}$$

$$\eta \rightarrow \infty, \quad f' = h = 0. \quad (17)$$

These equations include the constant surface temperature example ($\omega = 0$) as a special case. The equations can be solved for various combinations of ω , B ,

and Pr , although only a restricted range for ω is of interest. Since q is usually negative, the leading edge is at the temperature of the medium far from the plate. Equation (11) now reads

$$\psi = x^{(\omega+3)/4} f(y x^{(\omega-1)/4}), \quad \theta = 1 + B x^\omega h(y x^{(\omega-1)/4}), \quad (18)$$

so

$$\theta_y = B x^{(5\omega-1)/4} h'(y x^{(\omega-1)/4}), \quad (19)$$

and the heat transfer at the surface is proportional to. For instance, it is constant when $\omega = 1/5$ and $\eta = y x^{-1/5}$.

Finally, solutions to equations (15), (16), (17) can be used to test approximate methods and in stability calculations.

REFERENCES

- [1] E. R. G. ECKERT, *Introduction to the Transfer of Heat and Mass* (McGraw-Hill Book Co., New York 1950).
- [2] S. OSTRACH, *An Analysis of Laminar Free-Convection Flow and Heat Transfer About a Flat Plate Parallel to the Direction of the Generating Body Force*, NACA TN 2635, Feb. 1952.
- [3] H. SCHLICHTING, *Boundary Layer Theory* (McGraw-Hill Book Co., New York 1955).

Zusammenfassung

Diese kurze Mitteilung zeigt, dass für den Fall natürlicher Konvektion eine Familie von exakten Lösungen gefunden werden kann, welche die regierenden Gleichungen zur Darstellung bringen.

(Received: April 10, 1956.)

Ein Elektronenvervielfacher als Pulslichterzeuger

VON REINHOLD GERHARZ, Washington, D. C., USA¹⁾

Aufbau des Vervielfachers

Als Breitbandverstärker haben Elektronenröhren mit Sekundärvervielfachung der Hochfrequenztechnik neue Anwendungsgebiete eröffnet. Auch in vielen Zweigen der Impulstechnik hat diese Röhrenbauart Eingang gefunden, und der einstufige Röhrentyp EFP 60 wird in vielen Versuchsschaltungen benutzt.

Um die Eigenschaften eines nach Angaben von BAY [1]²⁾ entworfenen mehrstufigen Vervielfachers mit Gittersteuerung zu untersuchen, wurden in diesem Laboratorium einige Versuchsröhren hergestellt. Ferner stellte die Firma «National Union» (Orange, N. J.) einige technisch verbesserte Röhren des gleichen Entwurfs zur Verfügung, die als Typ HTIFA in den Handel gebracht werden. HOSTETLER publizierte konstruktive Einzelheiten über diese Röhren, welche jedoch einige Ergänzungen erfordern.

¹⁾ George Washington University, Elektronisches Laboratorium.

²⁾ Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 535.

Der Gesamtröhrenleitwert (G) beträgt etwa $0,1 \text{ A/V}$ und ist definiert durch den Quotienten von Stromänderung ΔI_{ges} und Gitterspannungsänderung ΔU_g

$$G = \frac{\Delta I_{ges}}{\Delta U_g}.$$

Der Entwurf sah ursprünglich einen maximalen Anodendauerstrom (Kollektorstrom) von $I_c = 200 \text{ mA}$ vor, der aber wegen der Wärmebelastung des Elektrodenmaterials nur auf 100 mA gehalten werden konnte. Dabei war ein Betriebsfaktor («duty-cycle») von 50% in Rechnung gestellt worden.

An den höheren Dynodenstufen des Vervielfachers sind zur Erleichterung der Wärmeabfuhr Abstrahlflächen angebracht, deren Oberflächen aufgeraut wurden. Als Dynodenmaterial wird eine Legierung von $98,3\%$ Silber und $1,7\%$ Magnesium verwendet. Das Formieren einer sekundäremittierenden Schicht erfolgt durch Erhitzen der Dynoden in einer stark verdünnten Sauerstoffatmosphäre. Metallisches Magnesium (Mg) an der Dynodenoberfläche wird dabei zu Magnesiumoxyd (MgO) umgeformt, welches dann als dünne Schicht von einigen Ångströmeinheiten die Dynode bedeckt. Da das restliche, noch in der Dynode befindliche nichtoxydierte Mg bei hohen Betriebstemperaturen der Röhre an die Oberfläche diffundiert und dort abdampfen kann, wurde als obere Grenze der zulässigen Dynodentemperatur 500°C gewählt. Auch bei dieser Temperatur ist die Mg-Verdampfung über grössere Zeitabschnitte immer noch nachweisbar, und es empfiehlt sich, die Betriebstemperatur unter 500°C zu halten.

Der Hauptanteil der anfallenden Wärmeenergie kann nur durch Strahlung aus der Röhre abgeführt werden. Deshalb lässt sich in grober Annäherung die Temperaturbilanz der Elektroden mit einer bei der Bestimmung der Konstanten σ in der Stefan-Boltzmannschen Strahlungsformel angewandten Beziehung erhalten[3]:

$$T = \sqrt[4]{\frac{W}{\sigma f_a \varepsilon_0 \varepsilon_1} + T_0^4},$$

dabei bedeuten

T Temperatur der sekundär emittierenden Oberfläche,

W Gesamtenergie des elektrischen Stromes durch die Dynodenoberfläche,

σ Stefan-Boltzmannsche Konstante,

f_a Verhältnis der wärmeabstrahlenden zur wärmeerzeugenden Oberfläche,

ε_1 relatives Emissionsvermögen infolge der Beschaffenheit der Oberflächen,

ε_0 relatives Emissionsvermögen des Oberflächenmaterials,

T_0 Temperatur der Umgebung (hier des Röhrenglaskolbens).

Es konnte festgestellt werden, dass eine wärmeabstrahlende Oberfläche von etwa 6 cm^2 genügt, um die letzte Dynode unter der kritischen Temperatur zu halten.

Der Ersatz des Silbers als Hauptmetall des Elektrodenmaterials durch eine Ni-Rh-Mg-Legierung³⁾ unterdrückte die Verdampfung des Mg nur unwesentlich, während die im folgenden zu beschreibenden Fluoreszenzeigenschaften der Dynode bei dieser Legierung merklich schwächer erscheinen.

Die bei den hohen Stromdichten im Flugraum zwischen den Dynoden entstehenden störenden Raumladungseffekte, welche die Elektronenflugzeit erhöhen

³⁾ Ni als Träger wegen der besseren relativen Emission; darauf eine dünne Schicht Rh zur Verhütung der Oxydation des Ni während des Formierens. Beim Erhitzen diffundiert fast nur Mg zur Oberfläche.

und die Sekundärausbeuten erheblich verringern, konnten durch Hilfselektroden fast ganz beseitigt werden. Dazu wurden bei diesem Röhrentyp Stäbchen aus Tantal ($\varnothing \approx 0,8$ mm) verwendet, die mittels Halteplättchen aus Glimmer ungefähr in der Brennnlinie der nahezu halbzylinderförmig gekrümmten Dynoden Aufstellung fanden. Die Betriebsspannung für die Stäbchen wurde von der übernächst höheren Elektrode abgezweigt. Im Falle der letzten Dynode liegt also die zugehörige Hilfselektrode auf Kollektorpotential. Die durchschnittliche Sekundärausbeute dieser Versuchsröhren konnte bei Stufenspannungen von 250 V und mit Hilfselektroden vor der 5., 6. und 7. Dynode auf $\delta = 4$ gehalten werden. Da die Raumladungseffekte nicht völlig zu unterdrücken sind, verursachen diese immer noch Störungen in den Elektronenbahnen und äussern sich hauptsächlich durch Zeitverzögerungen von etwa 10^{-9} s zwischen dem Eintreffen der ersten und der letzten Elektronen eines Signals auf der nächsthöheren Dynode. Daher kann die Zeitauflösung eines mit dieser 7stufigen Röhre gebauten Hochfrequenzverstärkers nicht besser sein als $7 \cdot 10^{-9}$ s, was bei sinusförmigen Schwingungen einer Frequenz von 71,5 MHz entspricht. Die Gesamtflugzeit der Elektronen durch die Röhre beträgt etwa $3,3 \cdot 10^{-8}$ s und bewirkt bei hochfrequenten Schwingungen nur eine Phasenverschiebung. Die Eingangs- und Ausgangskapazitäten betragen bei dem vorliegenden Vervielfacher etwa 18 pF.

Betrieb als Impulsgenerator

Die dynamische Kennlinie des Vervielfachers für Eingangsimpulse von 10^{-8} s Dauer ist in Figur 1 wiedergegeben. Der Steuerteil ist in Aufbau und Wirkungsweise einer Pentode vergleichbar. Bei der Kennlinie ist jedoch der mittlere Teil wegen der Elektronenvervielfachung um ein Mehrfaches steiler. Die weitgehende Nichtlinearität der Röhrenkennlinie zwischen Anlaufstrom- und Raumladungsgebiet wurde von BAY als günstige Voraussetzung für die Erzeugung von rechteckförmigen elektrischen Impulsen hoher Frequenz erkannt [1]. Um die aus der Röhre gelangenden verstärkten Impulse mit einem Zeitverzug wieder zum Steuersystem zurückzubringen, wurde ein Koaxialkabel als Rückkopplungsglied verwendet (Figur 2). Die Lage des Röhrenarbeitspunktes ist so zu wählen, dass von den ankommenden Signalen nur solche ausreichender Amplitude in den steilen Teil der Kennlinie gelangen.

Auf diese Weise lassen sich niedervoltige Rauschspannungen von dem erwünschten Impuls trennen. Die Ausgangsamplitude der Impulse ist infolge des horizontal auslaufenden Teils der Kennlinie im Raumladungsgebiet begrenzt, und die Impulsdauer wird von der als Differenzierglied arbeitenden Kabelankopplung festgelegt.

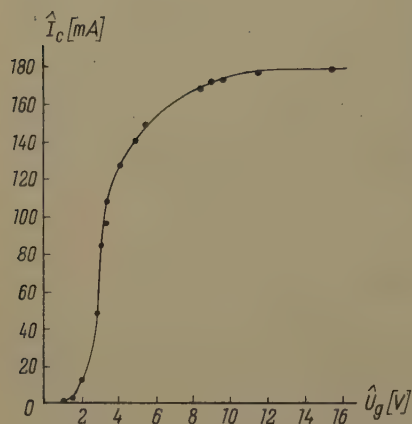
Bei einer Kabelrückführung von der letzten Dynode zum Steuergitter laufen im Kabel *positive* Impulse um, während bei der Rückführung zwischen Kollektor und Kathode *negative* Impulse durch das Kabel laufen. In beiden Fällen betrug die Impulshöhe etwa 7 V und die Impulsdauer etwa $8 \cdot 10^{-9}$ s, was einer Impulslänge auf dem Kabel von etwa

$$L = c_{\text{Kabel}} \cdot \tau_{\text{Impuls}} = 2,5 \cdot 10^{10} \cdot 8 \cdot 10^{-9} = 200 \text{ cm}$$

entspricht. Die Impulsdauer lässt sich durch am Ende kurzgeschlossene Kabelstücke («Stubs» von $L \approx 50$ cm) bis zu etwa $3 \cdot 10^{-9}$ s verkürzen (vgl. Fig. 2).

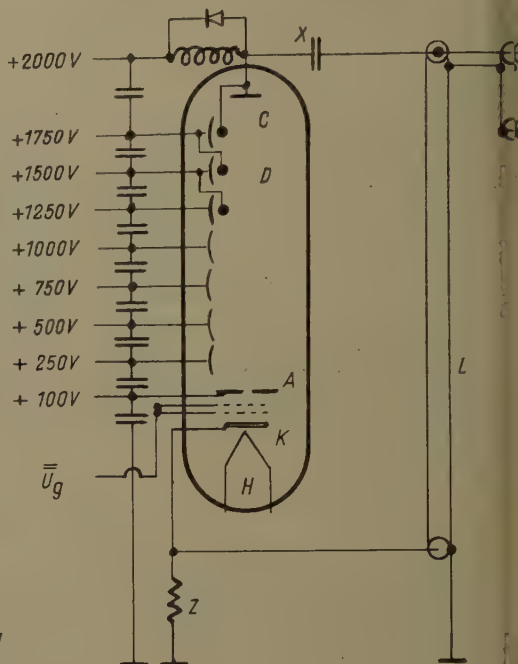
Die Impulsfrequenz hängt von der Länge des Rückführkabels ab und betrug etwa 10 MHz bei 25 m und 100 kHz bei 2500 m Kabellänge. Das Rückführkabel

ist zur Vermeidung schädlicher Reflektionen am Niederspannungsende mit seinem Wellenwiderstand abgeschlossen.



Figur 1

Dynamische Kennlinie eines 7stufigen Elektronenvervielfachers; Dauer des Eingangsimpulses 10^{-8} s.



Figur 2

Rückgekoppelter Impulsgenerator mit Reflektionsstück zur Impulsverkürzung. Die Dynodenstufenspannungen betragen 250 V. D 3 Hilfelektroden vor den letzten Dynoden; A Hilfsanode; C Kathode; H Heizung; L Rückföhrkabel als Laufzeitelement; \bar{U}_g Gittervorspannung; X Induktiver Spannungsabfall und Kabelankopplung; Z Kabelabschlusswiderstand.

Dynodenlumineszenz

Beim Betrieb der Röhre ist (besonders an den Dynoden mit höherer Stromdichte) eine bläuliche Lumineszenz der elektronenbeschossenen Oberfläche zu beobachten. Die Intensität dieser ins Sichtbare reichenden Strahlung scheint linear mit dem auf die Dynoden treffenden Elektronenstrom anzuwachsen und ist beim Impulsbetrieb der Leuchtstärke einer kleinen Kontrollglühlampe für elektrische Apparate vergleichbar. Die gesamte Lichtenergie ist zu etwa 0,2 W abgeschätzt worden.

In Hochvakuum-Vervielfacherröhren ist das Leuchten der Dynoden schon seit einiger Zeit bekannt. SCHÄETTI [4] erwähnt bei seinen Photomultipliern mit hoher Verstärkung eine blaue Emission der Silber-Magnesiumplatten, welche aber durch die Verwendung von Cu-Be-Dynoden wesentlich verringert werden konnte. BENE-

KING [5] berichtet von ähnlichen Leuchterscheinungen und versucht eine Erklärung durch die Annahme von Restgas-Ionisierung auf den Elektroden. Andere Autoren [6], [7], [8], [9], [10] untersuchten die Sekundäremission unter veränderlichen physikalischen Bedingungen und bringen Erklärungsversuche; jedoch sind Leuchterscheinungen wahrscheinlich wegen der geringen Stromdichte in ihren Apparaturen nicht beobachtet worden. Eine Anzahl von Arbeiten über gezüchtete Leuchteffekte für technische Zwecke (Elektrophosphoreszenz) mit verhältnismässig langen Nachleuchtzeiten (10^{-6} s) wurde kürzlich während eines Kolloquiums in England diskutiert [11] (vgl. auch [12]).

Die in der untersuchten Vervielfacherröhre auftretenden Leuchteffekte wurden mit einem Spektrographen photographiert (Platte vom III F-Typ). Selbst bei einer stundenlangen Exposition konnte keine Banden- oder Linienstruktur des Spektrums nachgewiesen werden. Die Auflösung betrug bei diesem Gerät $15 \text{ \AA}/\text{mm}$. Die Wellenlängenverteilung der Lumineszenz erstreckt sich, aus dem Ultraviolett kommend, von etwa 3300 \AA an mit wachsender Intensität über 4360 \AA (hier sanftes Maximum) und erreicht bei 4900 \AA schnell abfallend die Intensität Null.

Um die Dauer des Leuchtens zu untersuchen, wurde dieses mit einem 1P21-Photomultiplier und mit einem Oszillographen (Typ Tektronix 517) bei einer Zeitauflösung von $5 \cdot 10^{-9}$ s beobachtet. An das Gitter des Vervielfachers wurden mit einem Relaispulser (Spencer-Kennedy-Typ, etwa 100 Impulse pro Sekunde) positive Impulse von $7 \cdot 10^{-9}$ s Dauer gelegt. Dies entspricht der Zeitauflösung des Vervielfachers. Mehrere Messreihen zeigten, dass die Lumineszenz ohne beobachtbaren Zeitverzug den elektrischen Impulsen an den Dynoden folgt und dass die Abklingzeit des Pulslichtes nicht länger als 10^{-8} s dauert.

Bei kleiner werdendem Abstand von Lichtquelle zum Photomultiplier konnte die statistische Amplitudenverteilung der vom Photomultiplier abgegebenen Impulse beobachtet werden. Vergrösserung der einfallenden Lichtintensität bzw. Abstandsverringerung liessen erkennen, dass die einzelnen Impulse statistisch immer häufiger in einer Enveloppe von der gleichen Amplitudenfunktion erscheinen, welche den elektrischen Impuls am Ausgang der Vervielfacherröhre beschreibt.

Da die Lumineszenz nur in der dünnen MgO-Schicht auf der elektroneaufnehmenden Seite der Dynode beobachtet werden kann, wird die Abklingzeit des MgO-Leuchtens mit der gemessenen Abklingzeit identisch sein. Elektrolumineszenz von messbarer Intensität, die auf reinen Metalloberflächen auftreten könnte, ist wegen der sehr geringen Lichtabsorptionstiefen der Metalle unwahrscheinlich.

Infolge der kurzen Anregungs- und Abklingzeiten und wegen der emittierten Wellenlängen scheint es also berechtigt, das beobachtete Leuchten mit Elektrofluoreszenz im Innern des MgO zu erklären. Als Voraussetzung für die Sekundärelektronenemission der MgO-Schicht wird die dort herrschende hohe elektrische Feldstärke angesehen, welche je nach der MgO-Schichtdicke bis zu 10^8 V/cm betragen kann. JACOBS [7] erklärt die hohe Sekundärausbeute durch lokale Bildung von Elektronenlawinen in den MgO-Kriställchen. Es scheint deshalb sehr gut möglich, dass ein Teil der so gebildeten Elektronen als Leuchtelektronen in freien Energiebändern Austauschwirkungen hervorrufen und so die Fluoreszenz verursachen.

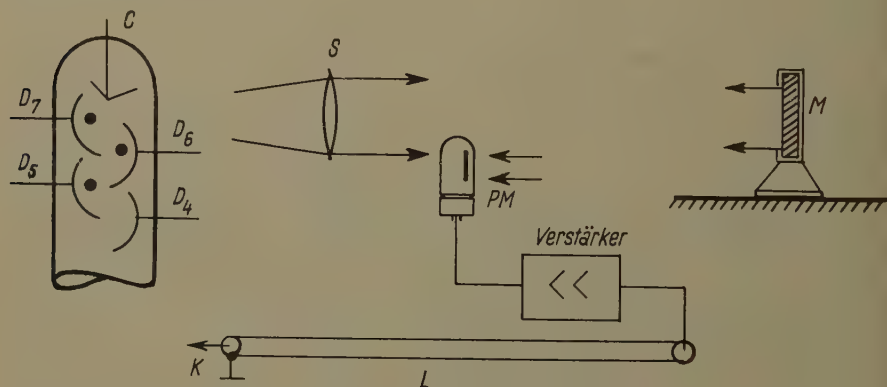
Die verschiedentlich vermutete Ionisierung von Gasresten an der Dynodenfläche als mögliche Ursache der Lumineszenz [5] ist wegen deren kurzen Abklingzeit und der zu erwartenden, aber nicht nachweisbaren Struktur des Spektrums abzulehnen. Auch eine spurenhafte Reduktion des MgO und dabei freiwerdender Sauerstoff infolge der Elektronenbeschussung kann wegen der hohen chemischen Affinität der Komponenten zueinander nicht als Hauptursache des Leuchtens angesehen werden. Kurzzeitige Überbelastung der Dynoden ergaben zwar Erhitzung

bis zur Rotglut und einsetzende Mg-Abdampfung, jedoch die Röhreneigenschaften erschienen nach dem Erkalten unverändert.

In den meisten gegenwärtigen technischen Anwendungen der Elektronenvervielfachung werden Lumineszenzerscheinungen als nichterwünschte Nebeneffekte behandelt. Der beschriebene Vervielfacher erlaubte es aber, gerade die Leuchteigenschaften für mehrere Versuchszwecke auszunützen: Eine Intensitätsmodulation des Dynodenleuchtens konnte zum Beispiel bis zu einer Frequenz von 50 MHz nachgewiesen werden, wenn sinusförmige Hochfrequenzspannungen an das Steuersystem der Röhre gelegt wurden. Die Verwendungsmöglichkeit der Elektrofluoreszenz zu stroboskopischen Untersuchungen ist nahelegend, und auch die Erzeugung von Röntgenstrahlimpulsen hoher Frequenz und genau festlegbarer Modulation und Steuerung ist prinzipiell möglich.

Pulslichterzeuger mit optischer Rückkopplung

Im Verlauf der Untersuchungen des Dynodenleuchtens erschien es aussichtsvoll, bei dem in Figur 2 gezeigten rückgekoppelten Impulsgenerator das Rückföhrkabel teilweise durch einen Lichtweg zu ersetzen. Dies ist in Figur 3 schematisch dargestellt. Alle Schaltelemente sind die gleichen wie in der Figur 2. Die vom Vervielfacher emittierten Lichtimpulse wurden mit einem 1P21-Photomultiplier aufgenommen und über einen Verstärker von 10^8 Hz Bandbreite in das Rückföhrkabel eingeleitet.



Figur 3

Oberer Teil des Vervielfachers mit Hilfsselektroden, optischer Rückföhrung und Laufzeitkabel L . M Verschiebbarer Spiegel; PM Photomultiplier; S Sammellinse; D_7 Leuchtdynode; K Kathodenverbindung.

Der Lichtweg wurde mit einem Spiegel verändert. Eine Verschiebung des Spiegels von ± 1 cm entspricht bei dem gegebenen Kabel von 50 m und einer ursprünglichen Impulsfrequenz von 5 MHz einer Frequenzänderung von ± 840 Hz. Ein Lichtweg von etwa 1 m bei 30 m Kabellänge markierte bei der beschriebenen Schaltung die obere Frequenzgrenze (etwa 8,5 MHz), an der noch lückenlose Pulslichterzeugung möglich war. Mit einer Sammellinse von 10 cm Öffnung und 20 cm Brennweite konnte der Lichtweg auf über 3 m verlängert werden, bevor die Impulsfolge aussetzte.

Die Form der erzeugten Lichtimpulse muss in erster Näherung mit den elektrischen Impulsen im Kabel übereinstimmen. Dies wurde experimentell bestätigt. Wegen Streulicht, Störrauschen und Spannungsschwankungen gelangen in den Rückführkreis eine beträchtliche Anzahl von Störsignalen mit kleiner Amplitude. Die impulsformenden Eigenschaften des Vervielfachers sieben jedoch auch in dieser Anordnung die Störsignale wegen deren begrenzten Amplitude im Anlaufstromgebiet der Kennlinie aus.

Diskussion

Die Dauer der Lichtimpulse hängt ausser von der Zeitauflösung des Vervielfachers nur von der Abklingdauer des lichtemittierenden Materials ab. Im Falle des MgO betrug die gemessene Lichtimpulsdauer nur etwa 10^{-8} s, und es konnten «Lichtpakete» erzeugt werden, die einer räumlichen Länge von

$$L = c \tau = 3 \cdot 10^{10} \cdot 10^{-8} = 300 \text{ cm}$$

entsprechen.

Sorgfältiger dimensionierte Röhren und höhere Betriebsspannungen würden die Zeitauflösung um 2 Grössenordnungen verbessern können, wie es bei einer Variation des Vervielfacherprinzips von STERNGLOSS und WACHTEL [13] kürzlich angedeutet wurde. Hierbei handelt es sich um einen Vervielfacher mit mehreren planparallel übereinander angeordneten Emissionsschichten (Dicke etwa 1000 Å, mechanisch gehalten von einem Traggitter, Abstände voneinander etwa 1 cm, Stufenspannungen 2 bis 3 kV), in welchen die ausgelösten Sekundärelektronen durch die dünnen Vervielfacherschichten hindurch zur nächsthöheren Dynode gelangen. Die errechnete Zeitauflösung soll $5 \cdot 10^{-11}$ s betragen.

Abgesehen von stroboskopischen Anwendungen dürfte die Erzeugung von schnellen Lichtimpulsen auch für den Bau von automatischen Rechenanlagen bedeutungsvoll werden. In dieser Richtung arbeitend, hat LOEBNER [14] über Untersuchungen an «opto-elektronischen» Schaltungen berichtet, bei welchen elektrophosphoreszente Substanzen mit lichtempfindlichen Zellen gekoppelt waren und mit denen einfache Verstärker- und bistabile Systeme bei geringstem Raumbedarf demonstriert werden konnten. Die begrenzte Ansprechgeschwindigkeit dieser Anlagen im Millisekundenbereich behaftet praktische Ausführungsformen jedoch mit schwer zu überwindenden Nachteilen. Bei Hochgeschwindigkeits-Rechenanlagen ist eine Loslösung der Informationselemente von materiegebundenen Führungssystemen in wachsendem Maße erforderlich. Streckenmodulierte Lichtpakete eröffnen neue Möglichkeiten, ein Maximum von Informationselementen in eine gegebene minimale Zeitspanne einzufügen und durch Regeneration für beliebig lange Zeit zu speichern. Ein Pulslichtverfahren könnte die Anwendung der endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit elektrischer Wellen im freien Raum für die Speicherung von Informations-elementen in die unmittelbare Zukunft rücken⁴⁾.

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] Z. BAY, unveröffentlichter Bericht an das Marineforschungsamt der USA (September 1952).
- [2] W. HOSTETLER, *Electron. Equip.* 7, 22 (1955).
- [3] F. KOHLRAUSCH, *Prakt. Phys.* 7, 480 (1955).

⁴⁾ Inzwischen sind Untersuchungen über die Verwendung von Lichtimpulsen in mathematischen Speicheranlagen weitergeführt worden. Die vorliegende Arbeit ist ein Teil dieses Projektes.

- [4] N. SCHAETTI, ZAMP 2, 123 (1951).
- [5] H. BENEKING, Z. angew. Phys. 4, 258 (1952).
- [6] W. JACOBS, Phys. Rev. 84, 877 (1951).
- [7] A. JACOBS *et al.*, Phys. Rev. 88, 492 (1952).
- [8] J. B. JOHNSON und K. G. MCKAY, Phys. Rev. 91, 582 (1953).
- [9] A. JACOBS, D. DOBISCHEK und J. FREELY, Phys. Rev. 91, 804 (1953).
- [10] A. FISCHER, Z. angew. Phys. 5, 258 (1955).
- [11] K. BUTLER und J. WAYMOUTH, Brit. J. appl. Phys. Suppl. 1, 4 (1955).
- [12] Proc. IRE 43, 1882ff. (1955).
- [13] E. J. STERNGLASS, Rev. sci. Instrum. 26, 1202 (1955).
- [14] E. LOEBNER, Proc. IRE 43, 1897 (1955).

Summary

A 7-stage electron multiplier with grid control system is described with respect to construction and performance. A coaxial feedback cable permits the regeneration of pulses with a repetition frequency of from 10 MC to 0.1 MC and a pulse length of about 8×10^{-9} s. The luminescence of the dynodes was investigated and an identity in the duration of the light pulses and the electrical pulses has been found. The interpretation of the luminescence effects by assuming electro-fluorescence phenomena indicates applications to problems of stroboscopy and of high-speed computation and storage devices.

(Eingegangen: 29. März 1956.)

Die Nusseltsche Zahl für laminare Strömung im zylindrischen Rohr mit konstanter Wandtemperatur

Von SERGEJ PAHOR und JANEZ STRNAD, Ljubljana¹⁾

Für die Wärmeleitung in strömenden Flüssigkeiten gilt die Differentialgleichung²⁾

$$\nabla^2 T = \frac{\rho}{\lambda} c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v \operatorname{grad} T \right).$$

Für stationäre Strömung im zylindrischen Rohr (Durchmesser $2r_0$) mit konstanter Wandtemperatur T_W suchen wir eine Lösung der Form

$$T = T_W + C R(x) \exp(-\beta z), \quad (1)$$

wobei $x = r/r_0$ und $C = \text{const.}$ Damit erhält man für Poiseuillesche Strömung die Gleichung

$$R''(x) + \frac{R'(x)}{x} + \left[\left(\frac{\beta}{Pe} \right)^2 + \beta (1 - x^2) \right] R(x) = 0 \quad (2)$$

mit der Randbedingung $R(1) = 0$. Als Parameter erscheinen hier die Pecletsche Zahl $Pe = 2 \bar{v} r_0 \rho c_p / \lambda$ und $\beta = \beta_0 Pe$. Alle Stoffwerte wurden als konstant

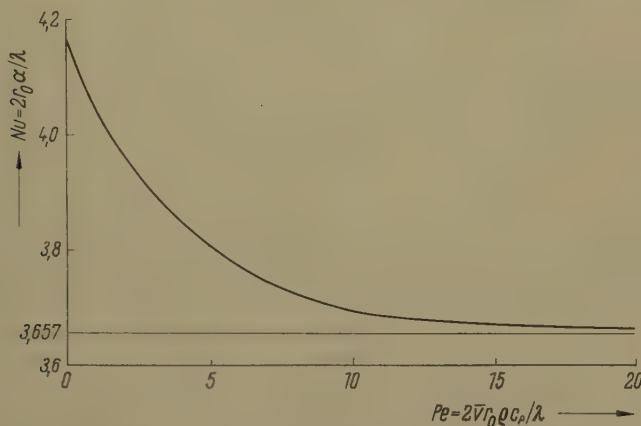
¹⁾ Universität.

²⁾ H. GRÖBER, S. ERK, U. GRIGULL, *Grundgesetze der Wärmeübertragung* (Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1955), S. 179.

vorausgesetzt. Hauptsächlich interessiert uns der kleinste Eigenwert p_1 und die zugehörige Eigenfunktion $R_1(x)$, welche in jedem Fall das Temperaturprofil für grosse Entfernungen von der Eintrittsstelle darstellt.

In technisch wichtigen Fällen ist Pe so gross, dass das Glied $(p/Pe)^2$, welches der Wärmeleitung in der Längsrichtung entspricht, vernachlässigt werden darf. Die so vereinfachte Gleichung lösten GRAETZ und NUSSELT²⁾ mit Reihenentwicklung. Hier wurden p_1 und $R_1(x)$ mit iterierter numerischer Integration nochmals bestimmt. Es ist $p_1 = 7,3140$.

Es erscheint uns mathematisch interessant, das Problem auch für beliebige Pecletsche Zahlen zu untersuchen. Für $Pe \rightarrow 0$ geht (2) in die Besselsche Dif-



Die Abhängigkeit der Nusseltschen Zahl von der Pecletschen Zahl.

ferentialgleichung über, so dass $R_1(x) = J_0(k_1 x)$ und $p_1/Pe = k_1 = 2,4048$. Mit k_n bezeichnen wir die n -te Nullstelle der Funktion J_0 .

Von beiden extremen Fällen ausgehend, erhält man durch Perturbation

$$p_1 = 7,3140 \left(1 - \frac{9,125}{Pe^2} + \dots \right) \quad (Pe \gg 1); \quad (3)$$

$$p_1 = 2,4048 Pe (1 - 0,1626 Pe + \dots) \quad (4a)$$

und

$$R_1(x) = J_0(k_1 x) + Pe [0,026 J_0(k_2 x) - 0,002 J_0(k_3 x) + \dots] + \dots \quad (Pe \ll 1). \quad (4b)$$

Die Nusseltsche Zahl wird definiert³⁾ mit

$$Nu = \frac{2 r_0 \alpha}{\lambda} = \frac{2 r_0 (\partial T / \partial r)_W}{T_W - \bar{T}},$$

wobei

$$\bar{T}(z) = \frac{1}{\bar{v} \pi r_0^2} \int_0^{r_0} T(r, z) v(r) 2 \pi r dr.$$

³⁾ H. GRÖBER, S. ERK, U. GRIGULL, *Grundgesetze der Wärmeübertragung* (Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1955), S. 182.

Für ein Temperaturprofil der Form (1) ist

$$Nu = \frac{-R_1'(1)}{\left[\int_0^1 2 R_1(x) (1-x^2) x dx \right]}.$$

Aus der Gleichung (2) folgt nun

$$Nu = \frac{p_1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{p_1}{Pe} \right)^2 \frac{\int_0^1 R_1(x) x dx}{\int_0^1 R_1(x) (1-x^2) x dx}.$$

Mit den aufgestellten Ausdrücken (3) und (4) für p_1 und $R_1(x)$ ergibt dies

$$Nu = 3,6570 \left(1 + \frac{1,232}{Pe^2} + \dots \right) \quad (Pe \gg 1)$$

und

$$Nu = 4,1805 (1 - 0,0439 Pe + \dots) \quad (Pe \ll 1).$$

Einige Werte von Nu für mittlere Pecletsche Zahlen wurden durch Polynomapproximationen für $R_1(x)$ bestimmt. Den Gesamtverlauf der Funktion $Nu(Pe)$ stellt das Diagramm auf Seite 537 dar.

Summary

The Nusselt modulus for laminar flow through a pipe with constant temperature of the walls has been determined as a function of the Peclet modulus. This function is represented by a diagram.

(Eingegangen: 11. Mai 1956.)

Empfindlichkeit eisbildender Impfstoffe auf ihre Wasserlöslichkeit

VON RAYMUND SÄNGER, Zürich¹⁾

Auf Grund von Messungen über die Eiskeimfähigkeit, ausgeführt an einer Mehrzahl von Stoffen mit Hilfe der Schaefer'schen Wolkendiffusionskammer [1]²⁾, hatten kürzlich B. J. MASON und J. HALLET [2], [3] die Auffassung vertreten, dass entgegen den bis heute veröffentlichten Befunden innerhalb des Temperaturbereiches von 0 bis -20°C in Wirklichkeit nur 2 Stoffe als eisbildungswirksam sich erweisen. Die beiden Stoffe umfassen die Mineralien Silberjodid (AgI) und Bleijodid (PbI_2); alle die übrigen bis heute als keimfähig gefundenen Stoffe verlören ihre Aktivität, wenn sie so weit gereinigt werden, dass auf spektroskopischem Wege keine Verunreinigungen, insbesondere von Silber und Jod, nachgewiesen werden können; dies trifft nach MASON unter anderem für Kupferjodid (CuI) zu, das auch in unserem Laboratorium [4], [5] als keimfähig beobachtet

¹⁾ Physikalisches Institut der ETH.

²⁾ Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 540.

tet wurde. Ferner ziehen die beiden Verfasser nebenbei auch unsere Wahrnehmung in Zweifel, dass das Mineral Kupfersulfid (CuS) die gleiche ausgeprägte Eisbildungsfähigkeit wie AgI besitze, wobei sie allerdings darauf hinweisen, dass auch bei ihren Messungen CuS bei -16° Anzeichen von Keimfähigkeit zeigte, doch könnte ihrer Meinung nach dies damit in Zusammenhang stehen, dass das verwendete CuS nur von der Reinheit der üblichen käuflichen Stoffe war. Nach ihren Vorstellungen ist damit die bis anhin an andern Stoffen ausser AgI und PbI_2 über -20° beobachtete Gefrierkeimwirksamkeit, insbesondere diejenige von CuI und CuS , nur darauf zurückzuführen, dass diese Impfstoffe Verunreinigungen von Ag und I enthalten, und so über die Bildung des in kleinsten Spuren noch aktiven AgI Eiskeimfähigkeit vortäuschen. Zugegebenermassen besteht bei CuI die Gefahr, dass auch bei sorgfältiger Darstellung der Stoffe noch Spuren von AgI vorhanden sein könnten. Nicht ohne weiteres wäre es aber verständlich, wie nach den üblichen chemischen Verfahren sorgfältig dargestelltes CuS durch I verunreinigt sein könnte. Tatsächlich haben nachträglich vom analytisch-chemischen Laboratorium der ETH durchgeführte spurenanalytische Untersuchungen ergeben, dass in dem von uns verwendeten CuS keine Spuren von I (sicher kleiner als $1,0 \cdot 10^{-6}$ g I per Probe) nachzuweisen waren.

Inzwischen hat dasselbe Laboratorium besondere Proben von CuS und CuI dargestellt; diese besitzen bezüglich ihres Metallgehaltes eine Reinheit, dass auch nach einem von O. GÜBELI entwickelten kolorimetrischen Verfahren³⁾ keine Ag -Spuren mehr aufzufinden und daher spektroskopisch AgI -frei anzusprechen sind. Eine erste behelfsmässige Prüfung dieser Stoffproben auf ihre eisbildende Wirksamkeit in einer gewöhnlichen Wolkenkältekammer haben gegensätzlich zu den Beobachtungen MASON und HALLETS ergeben, dass beide Impfstoffe gefrierkeimaktiv sind, wobei die Einsatztemperatur mindestens für CuS in derselben Höhe wie bei AgI liegt. Genauere Angaben über die Einsatztemperatur und über das Ausmass der Eisbildungswirksamkeit können aber erst nach Fertigstellung der neuen Messanlage für die Ermittlung der Eiskeimfähigkeit von Impfstoffen gemacht werden.

Unserer Auffassung nach besteht die Möglichkeit, dass die zur Schau getretene Zwiespältigkeit der Messergebnisse der verschiedenen Beobachtergruppen physikalisch wohl begründet ist. Es ist nicht gesagt, dass die Untersuchungen mit Hilfe der Schaeferischen Diffusionswolkenkammer zu denselben Ergebnissen führen wie jene mit Hilfe der gewöhnlichen Vonnegut-Schaeferischen Wolkenkältekammer [6], nämlich dann, wenn die untersuchten Impfstoffe eine zwar noch kleine, aber immerhin schon merkliche Wasserlöslichkeit besitzen.

In der Diffusionswolkenkammer äussern sich die von aussen eingepfropften Stoffpartikel unvermeidlich zuerst als Kondensationskerne, bevor sie allfällig als Gefrierkerne zur Wirkung gelangen; dies auch dann, wenn die Teilchen keine besonders ausgeprägte Hygroskopizität aufweisen. In den entstandenen und stets wachsenden Wassertropfen werden die eingebetteten Impfpartikel, wenn sie Wasserlöslichkeit zeigen, fortwährend im Abbau begriffen sein und keine wohldefinierte Oberfläche mehr besitzen. Nach neueren Vorstellungen [4], [5] spielt aber gerade der strukturelle atomare Aufbau der Oberfläche eines Impfstoffes eine überragende Rolle in der Frage der Eisbildungswirksamkeit; dieser Aufbau wird aber durch die in den Tropfen sich abwickelnden Lösungsvorgänge unweigerlich gestört. Es ist daher nicht zu erwarten, dass Impfpartikel – wenn sie als reine, vom Wasser unbenetzte Schwebeteilchen unterkühlten Wassertropfen begegnen, den Gefriervorgang auslösen und daher im üblichen Sinne gefrierkeimaktiv sind –

³⁾ Empfindlichkeit grössenordnungsmässig 10fach gegenüber der Spektralanalyse.

dasselbe auch tun, wenn sie in Wassertropfen eingelagert sind und ihre Oberfläche infolge ihrer Löslichkeit einem Abbauvorgang unterzogen wird. Solche Stoffe müssen daher, in die Diffusionswolkenkammer oder in die gewöhnliche Wolkenkältekammer eingeimpft, nicht unbedingt zu den nämlichen Ergebnissen hinsichtlich ihrer Eisbildungswirksamkeit führen. Da AgI (Löslichkeit 10^{-7} g je 100 g H_2O bei Zimmertemperatur) praktisch vollständig wasserunlöslich ist und CuI demgegenüber (Löslichkeit $0,8 \cdot 10^{-3}$ /100 g H_2O bei Zimmertemperatur) verhältnismässig eine gute Löslichkeit zeigt, wäre es damit verständlich, wenn im ersten Falle beide Messverfahren dieselben Ergebnisse über die Gefrierkeimfähigkeit zeitigen, während im zweiten Fall widersprechende Befunde zutage treten. Auch das Verhalten von CuS, das eine Löslichkeit von $3 \cdot 10^{-5}$ g/100 g H_2O besitzt, wäre erklärlich. Denn das Wechselspiel der geschilderten, in der Oberfläche der Impfstoffe sich abwickelnden Vorgänge muss sich notwendigerweise sehr mannigfaltig auswirken, so dass jede Art von Zwischenstufe sich einstellen kann, wobei sicherlich auch das Ausmass der Hygroskopizität mit ins Gewicht fallen wird.

Das letzte Wort über die Eisbildungsfähigkeit ist noch nicht gesprochen; das Beobachtungsmaterial noch viel zu spärlich, um den Mechanismus der Wirksamkeit eisbildender Kerne genau zu verstehen. So verfolgt diese Notiz nur den Zweck, darauf hinzuweisen, dass namhafte Gründe für die Zwiespältigkeit der Beobachtungen über die Eisbildungswirksamkeit der Impfstoffe in der Diffusionswolkenkammer und in der gewöhnlichen Wolkenkältekammer geltend gemacht werden können und dass dabei die Wasserlöslichkeit der untersuchten Impfstoffe allfällig eine massgebende Rolle spielt. Wir stellen fest, dass bei den Untersuchungen in den Wolkenkammern zu unterscheiden ist, ob sich die eisbildenden Kerne den unterkühlten Wassertropfen von aussen annähern oder ob sie sich bereits im Innern der Tropfen befinden.

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] V. J. SCHAEFER, *Industr. Engng. Chem.* **44**, 1381 (1952).
- [2] B. J. MASON und J. HALLET, *Nature* **177**, 681 (1956).
- [3] J. B. MASON, Tucson Konferenz, *The Scientific Basis for Weather Modification Studies*, April 10–12, 1956 (Referat).
- [4] H. R. BRUPPACHER und R. SÄNGER, *ZAMP* **6**, 407 und 485 (1955).
- [5] R. SÄNGER, Tucson Konferenz, Referat veröffentlicht in: *ZAMP* **7**, 213 (1956).
- [6] B. VONNEGUT, *Chem. Rev.* **44**, 277 (1949).
- [7] V. J. SCHAEFER, *Chem. Rev.* **44**, 291 (1949).

Summary

The ice-nucleating power of CuS and CuI, which H. PRUPPACHER and the author discovered earlier, was confirmed with samples entirely free from Ag and I, and Ag respectively. It is stated that the same threshold temperatures are not necessarily found with a diffusion cloud chamber compared with a normal cloud chamber. The former displays the disadvantage against the latter since the nucleating substance first acts as a condensation nucleus. The surface structure of the nuclei which determines the ice-nucleating power is more or less altered according to solubility.

(Eingegangen: 24. August 1956.)

Frühjahrstagung der S.P.G. 1957

Die nächste Tagung der S.P.G. (Schweizerische Physikalische Gesellschaft) wird am 4./5. Mai 1957 in Brunnen am Vierwaldstättersee stattfinden. Sekretariat: Basel, Klingelbergstrasse 82. K. P. MEYER

Buchbesprechungen – Book Reviews – Notices bibliographiques

The Kinematics of Vorticity. Par C. TRUESDELL (Indiana University Press, Bloomington 1954). XI + 232 pages, 5 figures; \$6.00.

Depuis quelques années, les travaux de TRUESDELL s'accumulent à un rythme imposant, et l'on peut bien dire que cet auteur a passé au rang des spécialistes de l'hydrodynamique théorique. Son érudition est considérable, son style limpide et agréable.

Le présent ouvrage rappelle en un certain sens la célèbre *Mécanique Analytique* de WHITTAKER, en ce que l'ensemble des travaux originaux de quelque intérêt sur la cinématique des fluides a été passé en revue et chaque auteur cité à sa place dans le développement de cette discipline. Cependant TRUESDELL ne veut pas faire un traité, mais un exposé original sur la formation, l'évolution et l'entretien des tourbillons. Nous ne saurions qu'approuver une telle entreprise, ayant nous-même souligné son intérêt dans un ouvrage sur les corps déformables paru il y a une dizaine d'années. TRUESDELL reprend les mêmes thèmes principaux, tout en y mettant un soin et en y recherchant un détail dont il faut lui savoir gré; et comme nous l'avions esquissé dans ledit ouvrage, il développe tout l'appareil géométrique et analytique dont il a besoin, définit clairement la notion de «vorticité¹⁾» et des mesures qu'il convient de lui attribuer, et développe tout au long la théorie de son évolution (en particulier: théorèmes de BERNOULLI dans toute leur généralité), de sa convection et de sa diffusion.

Ce n'est pas le côté dynamique du mouvement dans les fluides qui retient son attention, mais le côté purement cinématique, aussi est-il clair que le *tourbillon* en est le centre d'attraction.

La méthode de calcul employée est typique pour un ouvrage américain: pas un indice, pas une composante, bien qu'on nage dans les champs vectoriels et tensoriels. En revanche, emploi du calcul dyadique, que nous avons également développé et employé dans plusieurs ouvrages. Serait-ce peut-être l'excellente *Introduction to theoretical physics* de LEIGH PAGE, dans laquelle ont appris bien des physiciens théoriciens il y a 20 ou 30 ans, qui est responsable de cet usage? A notre avis, c'est un usage excellent, qui permet de formuler les équations d'une façon très condensée tout en évitant la fatigue que présentent les indices et les sommations. Il serait désirable que les auteurs européens se mettent à cette notation.

¹⁾ Il vaudrait la peine de créer ce mot en français pour caractériser cette propriété des fluides de porter le champ du tourbillon.

Ce livre n'est pas fait pour des commençants. Il servira admirablement à deux fins: aux spécialistes qui y trouveront une mine de renseignements bien ordonnés, et aux professeurs ayant entre autres tâches d'enseigner l'hydrodynamique, car ils y trouveront des suggestions excellentes quant au choix des sujets et à la forme de l'exposé.

L'ouvrage nous révèle l'importance des travaux ressortissant à de nombreuses traditions: anglaise, française, italienne, allemande, russe, suisse, roumaine et même norvégienne. La typographie en est bonne et fait honneur aux Presses universitaires d'Indiana qui, comme on le sait, impriment le *Journal Rational Mech. Anal.*, dont TRUEDELL est l'un des rédacteurs distingués. *A. Mercier*

Materials for Nuclear Power Reactors. Von H.H. HAUSNER und S.B. ROBOFF (Reinhold Publishing Corp., New York 1955). 224 S., 15 Fig.; \$3.50.

Die für Leistungs-Kernreaktoren massgebenden physikalischen Grundlagen sind heute so weit bekannt, dass sie nicht mehr das Hauptproblem bei der Weiterentwicklung darstellen. Vielmehr sind es zur Zeit grundlegende Ingenieur- und Materialprobleme, welche in den Vordergrund gerückt sind und von deren Lösung der weitere Fortschritt abhängt. Das vorliegende Büchlein führt auf sehr leichtfassliche Art in die Werkstoffprobleme des Reaktorbaues ein. Ausgehend von einer kurzen Einleitung über die kernphysikalischen Grundlagen und die Konstruktion von Kernreaktoren, werden die einzelnen Reaktorelemente und die für sie in Frage kommenden Werkstoffe besprochen. Die Eigenschaften aller verwendungsfähigen Metalle und übrigen Stoffe, wie zum Beispiel Graphit und Wasser, werden aufgeteilt nach ihrem Anwendungszweck (als Brennstoff, Moderator- und Reflektormaterial, Kühlmittel, für Steuerung und Strahlenschutz) aufgeführt und an Hand eingehender Tabellen näher spezifiziert. Im wesentlichen sind die vor dem Genfer Kongress bekanntgewordenen Daten zusammengestellt. Eine Tabelle der chemischen Elemente und ihrer Isotopen, welche die Wirkungsquerschnitte gegenüber langsamen Neutronen angibt, sowie ein Glossary der im Reaktorbau üblichen Fachausdrücke machen das Buch zu einem wertvollen Einführungswerk für alle jene, welche sich in materialtechnischer Hinsicht einen Überblick verschaffen möchten. *W. Epprecht*

Servomechanisms and Regulating System Design, Bd. II. Von HAROLD CHESTNUT und ROBERT W. MAYER (John Wiley & Sons, Inc., New York 1955). 384 S., 217 Fig.; \$8.50.

Der vorliegende 2. Band erscheint in beträchtlichem Zeitabstand vom ersten. Der Grund lag darin, dass die Entwicklung, insbesondere der nichtlinearen Servotechnik, sehr rasche Fortschritte erfahren hat, so dass ein Teil der bereits im Manuskript vorliegenden Kapitel vollständig neu bearbeitet werden mussten. Der 2. Band wendet sich an den Konstrukteur von Servosystemen, wobei viele Einzelprobleme eingehender behandelt werden. Ein besonderer Abschnitt, nämlich das 1. Kapitel, widmet sich der Messtechnik von Teilen oder auch ganzen Servomechanismen, wobei sowohl die zeitlichen Einschwingvorgänge wie auch der Frequenzgang untersucht werden. Im 2. Kapitel wird der Einfluss der Form des Eingangssignals auf den Entwurf eines Servosystems diskutiert. Hierzu gehört auch der Einfluss von Geräuschsignalen, die dem Eingang überlagert werden, wobei als Ziel erscheint, dass das Servosystem das Geräusch möglichst zugunsten des Nutzsignales unterdrückt. Das 3. Kapitel behandelt die Auswahl des geeigneten Stellgliedes, damit die Anforderungen in bezug auf Drehmoment,

Geschwindigkeit und Leistung erfüllt werden können. Im 4. Kapitel wird eine Übersicht von Korrekturnetzwerken gegeben, welche eine bestimmte Frequenzabhängigkeit der Verstärkung aufweisen. Im 5. Kapitel wird der Entwurf des Verstärkers diskutiert. Besondere Aufmerksamkeit wird der Nullpunkt Konstanz von Gleichstromverstärkern gewidmet. In diesem Zusammenhang sind auch die Trägersysteme wichtig, welche die Gleichstromgrösse in eine Wechselstromgrösse umsetzen, so dass diese verstärkt und wieder in eine Gleichstromgrösse zurückverwandelt werden kann. Eine besondere Rolle spielen die reinen Wechselstromservomechanismen, welchen das 6. Kapitel gewidmet ist. Die Stabilisierung und der Einfluss von Abweichungen der Trägerfrequenz werden eingehend behandelt.

Während bis hierher rein lineare Vorgänge betrachtet wurden, sind die folgenden Kapitel nichtlinearen Vorgängen gewidmet. So wird im 7. Kapitel die Linearisierung von nichtlinearen Elementen für kleine Abweichungen diskutiert. Diese Methode wird für grosse Ausschläge nicht mehr Gültigkeit haben, so dass für solche Vorgänge eine andere Linearisierung notwendig sein wird, was seinen Niederschlag im 8. Kapitel findet. Wichtig sind hier die Sättigungserscheinungen und die Diskussion der Stabilitätsfragen. Die Sättigungseffekte können bei Position-Servosystemen einen wesentlich andern Einschwingvorgang zur Folge haben, als dies bei linearen Systemen der Fall wäre. Besonders wichtig ist in diesem Zusammenhang auch das Spiel, das sich durch Reibung und Ungenauigkeiten der Getriebe ergibt. Bereits in diese Kategorie gehören die Relais-Servosysteme, die einen besonderen Fall der nichtlinearen Systeme darstellen. Im letzten Kapitel wird die Anwendung von nichtlinearen Elementen in Servosystemen behandelt, und es wird gezeigt, dass mit solchen Elementen unter Umständen eine bedeutende Verbesserung des Verhaltens erzielt werden kann. Eine Bibliographie bis 1954, auf welche im Text Bezug genommen wird, ergänzt das Buch.

Der Vorzug des Buches besteht darin, dass eine ausgezeichnete Auswahl der Probleme getroffen wurde, um die wesentlichsten Gesichtspunkte herauszuarbeiten. Das Buch kann jedem, der sich eingehender mit dem Entwurf von Servosystemen abgeben muss und der die grundlegenden Aspekte des ersten Bandes kennt, als Wegweiser wertvolle Dienste leisten.

H. Weber

Reaktionen in und an festen Stoffen. Von K. HAUFFE (Springer-Verlag, Berlin 1955). 696 S., 427 Abb.; DM 78.—.

Die Halbleitertheorie hat sich in den letzten Jahren als neues Bindeglied zwischen Physik und anorganische Chemie eingefügt. Die chemischen Reaktionen im festen Zustand können heute auf Grund der Fehlordnungs- und Halbleiterphänomene sehr weitgehend verstanden und in sehr vielen Fällen bereits auch quantitativ erfasst werden. Es ist daher sehr zu begrüßen, dass K. HAUFFE den Versuch gewagt hat, die Fehlordnungs- und Halbleitertheorien als Grundlage für die Erörterung der Reaktionen an und in festen Körpern zu wählen. Sein Werk erfüllt dadurch einen doppelten Zweck: es zeigt dem Chemiker, wie das chemische Geschehen im festen Zustand studiert werden kann und erinnert anderseits den Physiker daran, dass die Halbleitertheorie nicht nur für die heute in den Vordergrund gerückten Transistoren und Gleichrichter nutzbringend ist, sondern eine viel weiter gespannte Bedeutung besitzt. Sie reaktivierte die eine Zeitlang in den Hintergrund gerückte Festkörperchemie sehr stark. Das Buch darf schon heute als Standardwerk bezeichnet werden, das jedem Festkörperchemiker und -physiker wertvolle Dienste zu leisten vermag.

Der erste Teil führt zunächst in die Fehlordnungserscheinungen von Ionen- und Valenzkristallen ein und gibt die Berechnungsgrundlagen wie auch die von

SCHOTTKY und WAGNER eingeführte Symbolik an. Sodann werden an Hand gut untersuchter Beispiele die Beziehungen zwischen elektrischer Leitfähigkeit sowie der Thermokraft und den Fehlstellen dargelegt und die Versuchsmethoden, welche zur Erforschung dieser Beziehungen üblich sind, erläutert. Als erste Anwendung wird das Problem der Randschichterscheinungen besprochen, das besonders für die Deutung der Chemisorption und damit für die Katalysatorforschung von Interesse ist. Ein sehr eingehendes Kapitel setzt sich anschliessend mit der Diffusion auseinander, wobei wie in den vorangehenden Abschnitten sehr viele Beispiele zur Darlegung herangezogen werden. Im zweiten Teil des Werkes werden die gewonnenen Erkenntnisse auf die in der Praxis bedeutungsvollen chemischen Reaktionen von Festkörpern angewandt, so die Oxydationsvorgänge an metallischen Stoffen, die Bildung von Ionenverbindungen höherer Ordnung (zum Beispiel Spinellbildung) und schliesslich für die Reduktions- und Röstprozesse. Dadurch, dass hier wie schon in den grundlegenden Kapiteln ausserordentlich viele Beispiele und Literaturangaben verarbeitet und durch gute Figuren veranschaulicht sind, wird das Buch zu einem wertvollen Nachschlagewerk, was besonders auch durch die gut redigierten Autoren- und Sachregister betont wird. Das Werk bleibt indessen ein sehr gutes Lehrbuch, enthalten doch alle Kapitel einführende und zugleich zusammenfassende Abschnitte, die zusammengekommen einen vorzüglichen Überblick über die in den speziellen Abschnitten durch Beispiele erhärteten Forschungsergebnisse geben. Trotz der Fülle des Stoffes bleibt das Werk übersichtlich und leichtfasslich. So schliesst es denn eine bisherige Lücke aufs beste, und es ist daher jedem zu empfehlen, der sich mit Halbleiterproblemen, Reaktionen im festen Zustand oder Wechselwirkungen zwischen Festkörpern und Gasen zu befassen hat, sich in dieses Werk zu vertiefen.

W. Epprecht

Nuclear Magnetic Resonance. By E. R. ANDREW (Cambridge University Press 1955). 265 pp., 61 figs.; 35 s.

Professor ANDREW has written an excellent review of the subject of nuclear magnetic resonance. It is particularly suited for those who wish to begin their study of this field, since the book is not only comprehensive, but the physical ideas have been explained with great clarity and with a minimum of mathematics. For details, the reader is referred to the original papers; Professor ANDREW's listing of these papers forms a most comprehensive bibliography which in itself is a valuable contribution to the book.

The book, however, is not only suited for beginners, but for practicing physicists as well, since one often desires a quick review in a part of the field in which he is unfamiliar. Indeed, in the short time that this reviewer has had the book in his possession, he has found Professor ANDREW's book exceptionally well suited to that purpose, since, in addition to the bibliography, a most comprehensive listing of nuclei and sample materials (organic and inorganic solids, metals) which have been investigated by nuclear magnetic resonance is included in the appendices.

The only drawback lay outside the author's hands: it is always difficult to write a book in a rapidly developing field. As a consequence, several of the newest and most exciting developments in the field are not covered. Professor ANDREW, however, is aware of this inevitable shortcoming, bringing, for example, by means of a footnote written as the book went to press, the reader's attention to the results of studies at extremely high resolution, typified by the work of ARNOLD and ANDERSON.

W. G. Proctor

ELEKTRONENMIKROSKOPE
ELEKTRONENDIFFRAKTOGRAPHEN
HOCHSPANNUNGSOSZILLOGRAPHEN



TRÜB, TÄUBER · ZÜRICH

Neuerscheinung

**Fünfzig Jahre Relativitätstheorie - Cinquantenaire de la
Théorie de la Relativité - Jubilee of Relativity Theory**

Bern, 11.-18. Juli 1955

herausgegeben von / édité par / edited by A. MERCIER und M. KERVAIRE
10 Hauptvorträge und 23 Kurze Mitteilungen mit Diskussionen 10 Exposés prin-
cipaux et 23 Communications avec leurs discussions 10 Main Reports and 23 Short
Lectures with Discussions

Helvetica physica acta, Supplementum IV

284 Seiten Fr./DM 36.-

BIRKHÄUSER VERLAG · BASEL/STUTTGART

MATHEMATICAL REVIEWS

A journal containing reviews of the mathematical literature of the world, with full
subject and author indices

Sponsored by

*The American Mathematical Society
The Mathematical Association of America
The Institute of Mathematical Statistics
The Edinburgh Mathematical Society
Société Mathématique de France
Matematisk Forening i København*

*Het Wiskundig Genootschap te Amsterdam
The London Mathematical Society
Polskie Towarzystwo Matematyczne
Unión Matemática Argentina
Indian Mathematical Society
Unione Matematica Italiana*

Subscriptions accepted to cover the calendar year only. Issues appear monthly
except July. \$20.00 per year. \$10.00 to members of sponsoring organizations.
An edition printed on one side, for bibliographical purposes, is available at an ad-
ditional charge of \$1.00 per year. Unesco Book Coupons may be used in payment.

Send subscription orders to

AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY

80 Waterman Street, Providence 6, R. I.



Der Schatzkanzler auf der Darius-Vase zählt die eingenommenen Steuern auf dem Rechenbrett zusammen. Aus B. L. VAN DER WAERDEN, *Erwachende Wissenschaft*

Erwachende Wissenschaft

Ägyptische, babylonische und griechische Mathematik

Von Dr. B. L. VAN DER WAERDEN, Professor an der Universität Zürich. Aus dem Holländischen übersetzt von HELGA HABICHT und mit Zusätzen vom Autor versehen. 488 Seiten mit 180 Figuren. In Ganzleinen gebunden Fr./DM 37.50. Sammlung «Wissenschaft und Kultur», Band 8.

Aus dem Inhalt: Einführung: Wozu Geschichte der Mathematik – I. Die Ägypter – II. Zahlensysteme, Ziffern und Rechenkunst – III. Babylonische Mathematik – IV. Das Jahrhundert von Thales und Pythagoras – V. Das goldene Zeitalter – VI. Die Zeit Platons – VII. Die Alexandrinische Zeit – VIII. Niedergang der griechischen Mathematik – Sachverzeichnis.

Der Autor war bestrebt, das Buch einerseits wissenschaftlich exakt, andererseits aber auch leicht fasslich zu machen in dem Sinne, dass jeder, der an einer Mittelschule Mathematik gelernt hat und sich für die Geschichte der Mathematik interessiert, es verstehen kann. – Die Geschichte der Mathematik erscheint im rechten Licht nur, wenn man sie gegen den Hintergrund der allgemeinen Kulturgeschichte betrachtet. Das Leben in den griechischen Städten in der klassischen Zeit ist anders als das Leben an den Fürstenhöfen von Alexandrien und Syrakus, und die Wissenschaft wird vom Leben manchmal entscheidend beeinflusst.

Bestellungen an Ihren Buchhändler erbeten

BIRKHÄUSER VERLAG · BASEL UND STUTTGART